

## TABLE

<i>Préface</i> par M. Grun-Réhomme et J.-M. Vappereau .....	7
<i>Etudes préliminaires à la topologie</i> par Johann Listing .....	23
« <i>Les paroles imposées</i> » par Jacques Lacan .....	83
<i>Annexes</i> .....	95

---

## Préface

par Michel Grun-Réhomme  
et Jean-Michel Vappereau

**V**oici une lecture à conseiller aux lecteurs de Lacan, aux usagers du discours scientifique, aux mathématiciens eux-mêmes et aux psychanalystes.

Nous comptons par cette préface montrer l'utilité de la publication d'un tel texte, qui présente un intérêt pour qui veut s'orienter dans l'enseignement de Lacan. Il y trouvera en effet un trajet qui le mènera du stade du miroir à la théorie du nœud, en passant par l'articulation de la demande et du désir sur le tore. Itinéraire de structure.

Dans un style qui paraîtra encore hésitant aux mathématiciens d'aujourd'hui, Listing affronte, à l'aide de permutations combinatoires, une série de questions là où d'autres échouent, tant le glissement peut se produire à chaque pas (voyez les difficultés d'un Linné lui-même face à l'hélicoïde). C'est aussi en s'appuyant sur une écriture, sur un jeu constitué en un nombre réduit de lettres, que Lacan aborde la topologie du sujet. Il s'agit dans les deux cas de formuler et de donner les critères techniques de l'articulation conceptuelle, de dégager par là-même une structure. Bien sûr, nous entendons conseiller une telle lecture aux analyses « moyens »<sup>1</sup>, qui, comme nous, tentent de rendre

1. J. LACAN, « Peut-être à Vincennes », *Ornicar ?*, n° 1, 1975, p.5.

raison de questions réputées difficiles dans un idéal de simplicité. Nous ne nous adressons donc pas aux psychanalystes « véritables » qui n'ont pas à y entendre plus que de faire tenir à cette topologie la place du réel, « jusqu'à meilleure à se prouver »<sup>1</sup>.

Listing nous montre comment le réel, le symbolique et l'imaginaire s'articulent dans la mathématique, comment on symbolise un imaginaire de la géométrie, comment on se heurte à un réel de l'opposition. Rappelons également que Lacan situe parmi les disciplines de formation du psychanalyste, la « théorie historique du symbole »<sup>2</sup>.

Pour les mathématiciens, ce texte élémentaire quant à ses notions de topologie s'inscrit toutefois à l'orée d'un bouleversement épistémologique qu'illustre de façon éminente Félix Klein dans son programme d'Erlangen (1872). Il nous semble que l'histoire des mathématiques, qu'il serait toujours souhaitable d'inscrire parmi les disciplines de formation des mathématiciens et des enseignants, reste essentielle pour établir la consistance et la raison des concepts actuels et pour maintenir une sensibilité à l'ouverture des problèmes. Les difficultés de cet enseignement semblent résider dans des intérêts souvent limités à une réduction de la pratique à une simple application de techniques, au détriment d'une mutation des conceptions. Plus réduite est la place laissée aux choses nécessaires qui ne trouvent pas pour autant d'utilité immédiate, moins d'exigence se rencontre quant à l'articulation des concepts dans ce domaine. Bien sûr, il n'est pas question d'entreprendre une approche historique des mathématiques qui ne serait pas accompagnée d'une bonne assimilation de cette science. C'est sans doute là la difficulté majeure. En témoignent les tentatives de la psychologie de recourir aux mathématiques, parce qu'elle se contente de calibrer les phénomènes psychiques. Lacan nous incite à tenter en psychanalyse une mathématisation d'un tout autre ordre.

Esquissons une première recension du parcours de Listing. Après quelques remarques sur le terme de topologie, l'article se compose de quatre parties d'inégales importances.

1. J. LACAN, « L'étourdit », *Scilicet*, n° 4, 1973, p. 32.

2. *Écrits*, Seuil, p. 289.

La première, intitulée « De la position » (p. 26 à 47), sert de référence aux trois autres. Elle traite de la situation d'un objet dans l'espace, sans utiliser les notions de grandeur et de mesure. Listing met en place un codage numérique des transformations isométriques des objets rigides. Avec l'exemple du dé, il s'intéresse à la mise en place des couples d'opposition.

Dans la deuxième partie traitant de l'hélicoïde (p. 47 à 67), l'auteur étudie, à l'aide de la combinatoire qu'il vient de définir, les tresses cylindriques et leurs fermetures. La distinction de deux types de torsion (gauche-droite) l'amène à reprendre cette question de la *Philosophia botanica* de Linné.

Ayant envisagé les fermetures des brins de ficelles et le problème de la représentation plane de ces objets spatiaux, il en vient nécessairement à considérer des nœuds (p. 67 à 74).

Enfin, Listing termine par des considérations relatives aux complexions linéaires. Il indique que sa topologie pourrait servir à l'étude des graphes et de la symétrie. Il y pense en tant qu'elle pourrait trouver des applications dans la morphologie des êtres organisés et en cristallographie.

Essayons maintenant de provoquer quelques intérêts pour ces questions en développant certains de ces points.

#### *Pourquoi la topologie*

Il s'agit de la première occurrence du terme de topologie dans la littérature scientifique, et Listing explique pourquoi il est amené à l'introduire. Ici, pas de mesure, le terme de géométrie est donc inadéquat à rendre compte de cette science. Le terme de topologie remplacera progressivement celui d'*Analysis situ*, dû à Leibniz. Poincaré, qui établit la topologie moderne, utilise encore l'expression leibnizienne, alors que Hilbert parle de la topologie en 1930. Ce changement progressif de terminologie résulte de la conjonction de facteurs linguistiques et de facteurs internes aux mathématiques.

L'influence du latin, différente en France et en Allemagne, provoque un refus des mathématiciens français à adopter cette

expression de topologie. Le latin est encore une langue savante, par contre le terme de topologie témoigne d'une pensée moderne.

Parallèlement, la mathématique euclidienne garde toujours son prestige. La victoire, à cette époque, de la géométrie analytique de Descartes à l'encontre de la géométrie dite synthétique, fait que la topologie se présente comme une anomalie historique.

Il est tout-à-fait surprenant de constater que Listing est déjà moderne dans son approche géométrique, en privilégiant la relation entre objets plutôt que les objets eux-mêmes. Souvenons-nous qu'il était un élève de Gauss. Il ne se contente pas d'introduire le terme, il montre la nécessité d'une nouvelle méthode d'investigation, alors qu'avant F. Klein<sup>1</sup>, les géomètres sont encore obnubilés par les figures ou par les équations algébriques, et dans tous les cas par la mesure.

Avec F. Klein, on apprend qu'une géométrie est un groupe de transformations\*. La topologie va étendre son investigation à des domaines plus larges et autres que les courbes et les surfaces de la géométrie analytique.

« Les mathématiciens ont toujours à passer de l'expérience des faits à la reconnaissance de l'essence invariante à laquelle les faits renvoient. »<sup>2</sup>

Le choix d'une transformation dans l'espace implique la constance. Les invariants sont les traits qui ne varient pas dans un objet, donc ceux préservés sous l'effet d'un type de transformations. La topologie traite des propriétés invariantes par transformations continues ; cela est perçu assez tôt, même si la définition axiomatique des transformations continues ne viendra que plus tard.

La mesure est un invariant numérique pour les transformations de la géométrie euclidienne. Il faut dire que pour nous, point de cela, mais d'autres dimensions des objets, dans des couples d'opposition comme connexe et non connexe.

1. F. KLEIN, *Le Programme d'Erlangen*, Gauthier-Villars, 1974.

\* Dans d'autres disciplines, cette mutation est à peine réalisée — par exemple le rôle des transformations dans *la Pensée sauvage* de Lévi-Strauss ou la grammaire transformationnelle de Chomsky.

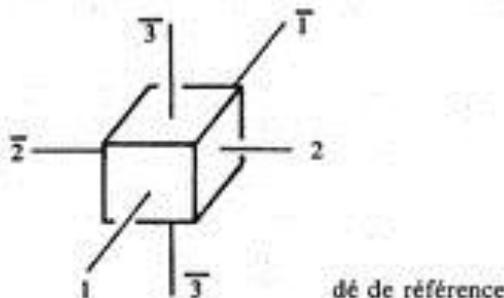
2. J.-T. DESANTI, *Introduction à la phénoménologie*, Gallimard, « Idées », p. 72.

Eventuellement, des nombres comme le nombre de trous, le nombre de bords, de faces, etc. Il y a donc d'autres invariants. Par exemple, la topologie algébrique se trouve définie par l'étude des invariants constructibles en algèbre et attachée à des objets de l'espace (cf. le groupe fondamental d'un nœud).

### De la position

Il n'y en pas trente-six comme on le croit communément. Il y a deux fois vingt-quatre positions d'un objet par rapport à un autre objet semblable. Cela se lit très simplement. Il existe donc quarante-huit positions possibles pour un objet dans l'espace, et nous allons voir en détail comment Listing procède pour les énumérer. Ces positions se répartissent en deux moitiés opposées. Et fort judicieusement, Listing repère qu'il est impossible de passer géométriquement d'une position d'une moitié à une position de l'autre moitié par des transformations de l'espace de dimension trois. Nous voyons ici la distinction que Lacan nous invitait sans cesse à repérer entre la réalité (la *Wirklichkeit* freudienne) et le réel. A partir d'une réalité du maniement des objets, à partir d'une construction même exhaustive, on aboutit à la mise en place de deux moitiés, à un réel, à une impossibilité.

Voyons comment Listing énumère ces quarante-huit positions. Notre espace géométrique intuitif est de dimension trois, et tout corps se repère par rapport à trois directions, chacune d'elle ayant deux sens. Il prend l'exemple d'un dé par rapport à un autre dé qui sert de référence. Chaque dé est caractérisé par six faces (c'est-à-dire trois directions ayant chacune deux sens). Il note trois vecteurs de base  $1, 2, 3$  et  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$  les vecteurs opposés ( $i$  et  $\bar{i}$  se trouvent sur deux faces opposées pour  $i = 1, 2, 3$ )\*. Le premier dé référence est fixe et on numérote les faces

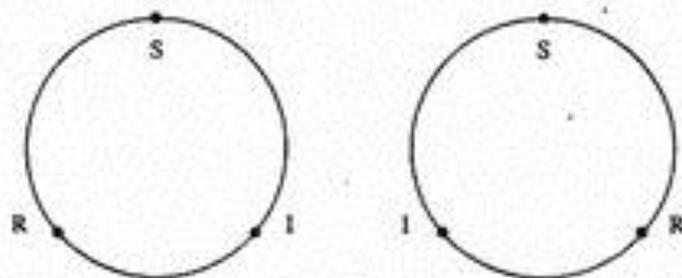


d'un autre dé sous cette contrainte. La position de ce deuxième dé est déterminée par le triplet numérique des trois faces qui correspondent aux trois faces 1, 2, 3 du dé de référence.

Une réflexion combinatoire associée à la réalité géométrique des dés permet de constater qu'il faut retenir six valeurs numériques possibles pour la face 1. Celle-ci étant fixée, il ne reste que quatre valeurs possibles à attribuer à la face 2, et ainsi seulement deux valeurs pour la face 3. En formule, on obtient  $2^1 \times 3!$  triplets, soit plus simplement  $6 \times 4 \times 2 = 48$  positions. C'est seulement l'observation géométrique qui permet de les répartir en deux moitiés égales de 24 positions.

Donnons un exemple plus réduit qu'utilisait volontiers Lacan. A prendre trois lettres R, S, I, l'analyse combinatoire la plus élémentaire nous apprend qu'il existe six permutations entre ces trois lettres ( $3! = 6$ ), mais cela vaut comme dans le cas des positions étudiées par Listing, cela fait deux fois trois. En effet, à articuler entre elles ces permutations, nous quittons un aperçu seulement descriptif pour atteindre leur composition. Nous constatons qu'à partir d'une quelconque d'entre elle (R, S, I, par exemple), nous ne pouvons en obtenir par *permutation circulaire* que deux autres SIR et IRS, pour revenir à la première après ce tour, RSI. Il faut introduire une *transposition* de deux lettres pour atteindre une autre disposition SRI, par exemple, qui donne à son tour deux autres cas par *permutation circulaire* RIS et ISR pour revenir à l'ordre initial SRI.

Donnons la version géométrique de ce fait, en considérant les deux figures suivantes (dans le plan) :



Il est impossible de passer de l'une à l'autre par un déplacement dans le plan (il n'y a que des permutations circulaires, c'est-à-dire des rotations). Une troisième dimension est nécessaire pour que le passage puisse avoir lieu par retournement ou image miroir.

Qu'est-ce qui fonde ces groupes d'opposition ?

L'impossibilité de passer de l'un à l'autre, compte tenu des contraintes dues au nombre de dimensions données, isole un réel de l'imaginaire. A rajouter une dimension, cette opposition s'efface.

Dans son enseignement, Lacan s'appuie sur une base binaire pour distinguer le symbolique et l'imaginaire, précisément dans le cas d'une opposition qui ne s'efface pas et qui ne peut être définie par un étalon réel ; par exemple, l'opposition droite-gauche. « L'illusion que nous ne saurions rien transmettre à des êtres transplanétaires sur la spécificité de la droite et de la gauche m'a toujours semblé heureuse en tant qu'elle fonde la distinction de l'imaginaire et du symbolique. »<sup>1</sup> L'introduction d'une autre dimension tente d'éprouver les couples d'opposition en jeu par leur annulation. C'est seulement après cette épreuve négative, lorsque l'opposition ne s'annule pas, que rien ne la définit, qu'alors se trouve distingué un réel du symbolique.

Listing termine cette partie par la recherche d'un procédé algébrique qui permet, connaissant la position d'un dé A par rapport à un autre dé B, d'en déduire la position de B par rapport à A. Par ce relevé des automorphismes (transformations de cette géométrie) de l'ensemble des dés, il met l'accent sur la structure au lieu de se contenter d'une description des objets eux-mêmes.

« Chaque fois que vous avez à faire à une entité dotée d'une structure essayez d'en déterminer le groupe des automorphismes. »<sup>2</sup> Procédé basal pour les mathématiciens. Lacan nous a appris qu'il en va de même pour les psychanalystes.

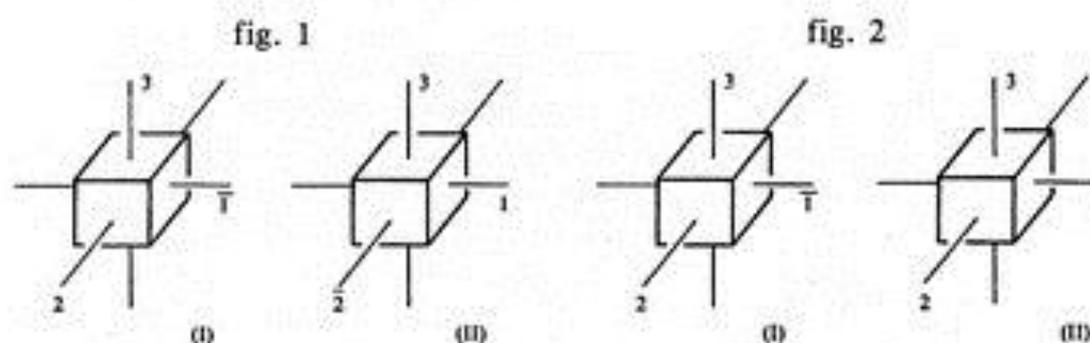
L'auteur distingue deux types de transformations dans la position relative d'un dé par rapport à un autre (ce sont les

1. J. LACAN, *Encore*, Le Seuil, 1972, p. 120.

2. H. WEYL, *Symétrie et Mathématique moderne*, Flammarion, p. 140.

automorphismes en question) : l'inversion, qui transforme deux sens en leur opposé :  $(i, j, k)$  donne  $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$  ; — la perversion, qui transforme un seul sens en son opposé :  $(i, j, k)$  donne  $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$  ; où  $i, j$  et  $k$  prennent des valeurs distinctes dans l'ensemble  $(1, 2, 3)$ . Les définitions sont données à la page 40 dans le texte de Listing.

Introduisons un peu de schématisation pour illustrer ces deux types de transformations :



Quelles sont les transformations géométriques possibles pour passer d'un dé A à un dé B, compte tenu de sa position ?

Mis à part la translation, qui laisse le dé identique quant à sa position, il reste deux types d'isométries : les rotations et les symétries.

La figure 1 présente l'exemple d'une *inversion*. On passe de la position (I) à la position (II) par la composition d'une rotation axiale d'axe  $k = 3$  dans notre dé de référence et d'angle  $\Pi$ , suivie d'une autre rotation de même angle et de même axe du dé de référence\*.

La figure 2 correspond à une *perversion* dont une seule direction est modifiée. Les positions (I) et (II) s'échangent par une symétrie de l'espace par rapport au plan défini par  $i = 1$  et  $K = 3$  de notre dé de référence. On a ainsi une image en miroir.

Ce sont les perversions qui, contrairement aux inversions,

\* Il ne s'agit pas dans cette inversion de passer de la position d'un dé B par rapport à un dé A à la position du même dé A par rapport à ce dé B, comme c'est le cas page 31 du texte de Listing.

font communiquer les deux moitiés dont nous disions que leur opposition établit une différence réelle.

*De l'hélicoïde*

Par cette importante étude qui traite de l'hélicoïde, Listing établit un lien entre la position et les nœuds. Nous ne consacrerons pas à ce chapitre un commentaire détaillé, bien qu'il eut mérité une attention plus ample, que chacun pour sa part peut lui accorder. Contentons-nous ici de dire sa fonction dans l'économie de l'article. Il considère l'hélicoïde comme le trajet d'un point à la manière de la mécanique classique.

Le point est caractérisé par la combinaison de deux mouvements, décrits en référence aux trois directions (1, 2, 3) du dé de référence, qui se résument à une rotation dans le plan (1, 2) et à une translation selon la direction 3. Notons que Listing prend des exemples en botanique avec le développement hélicoïdal de certaines fleurs, et qu'il en vient à établir la distinction lévogyre-dextrogyre.

Cette étude aboutit à la considération de spirales cylindriques. Ces spirales de Listing se retrouvent comme trajets à la surface d'un tore qui donnent lieu aux nœuds toriques. C'est ainsi que Lacan entame, dans son Séminaire sur « L'identification », son propos topologique relatif aux surfaces. Il thématise par des trajets sur le tore la relation de la demande et du désir.

Nous pouvons voir que nous sommes directement précipités dans la topologie du nœud, même s'il semble qu'il ne s'agisse encore que de topologie des surfaces.

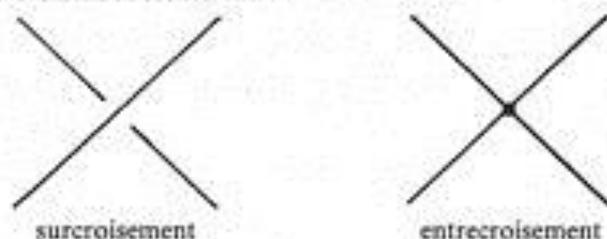
*Du point nodal*

Par le raboutage de tresses cylindriques, Listing constate que se produisent des nœuds ou des 2-chaînes.

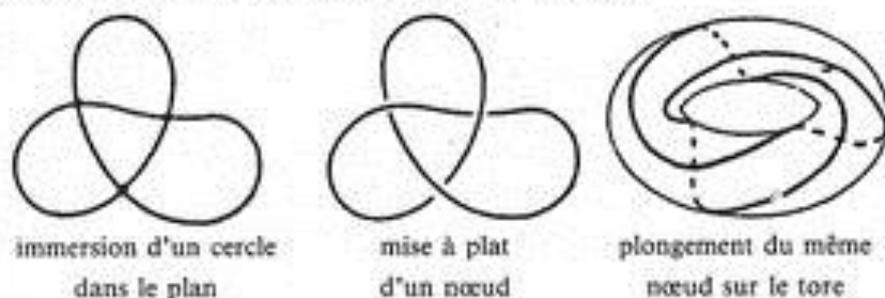
Il se trouve alors confronté au problème de la représentation

de ces objets spaciaux. Remarquons que tout nœud n'est pas torique, c'est-à-dire ne se dispose pas à la surface d'un tore (de genre 1) sans se recouper. De ce fait, la projection sur une surface plane ou sphérique sera privilégiée par défaut, sachant qu'aucun nœud, hormis le nœud trivial, ne se dessine sur la sphère ou le plan sans recouplement. C'est seulement plus tard que les mathématiciens reviendront aux surfaces toriques avec l'introduction d'un invariant numérique, le genre du nœud (= la moitié du nombre de trous de la plus petite surface torique qui supporte d'être coupée en deux moitiés par le nœud). Nous allons voir que la présentation plane du nœud demande des précautions, mais en donne de bons moyens d'approche. La précaution consiste à dire qu'en aucun cas, on ne confond les brins de ficelle lorsqu'ils se superposent.

Dans cette présentation plane, Listing distingue le surcroisement de l'entrecroisement :



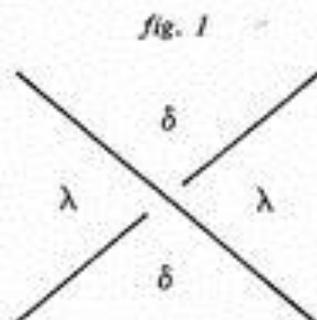
Il utilisera par la suite le terme de croisement dans les deux cas lorsqu'aucune confusion n'est possible, mais nous préférons réserver le terme de croisement exclusivement pour le surcroisement. Cette distinction est essentielle pour la définition de son point nodal. Nous pouvons préciser que l'entrecroisement correspond à une immersion (projection non bijective) du nœud dans le plan et le surcroisement à une mise à plat ou projection régulière du nœud. Ce problème se pose en ce qui concerne les surfaces multitoriques puisque le nœud peut y être plongé, c'est-à-dire disposé sans présenter de croisements.



Partant de l'imaginaire, ces questions de présentations vont se révéler intégralement calculables<sup>1</sup>, donnant ainsi le moyen de frôler un réel.

La recherche du nombre minimal de points de croisement permet à Listing d'approcher une présentation plus univoque pour chaque nœud, sans cela le nœud peut se présenter d'une infinité de manières. Il donne l'exemple d'un nœud (*fig. 10*) présentant sept croisements qui se réduisent à cinq dans les quatre figures *12* à *15*. Notons pour l'anecdote que le nœud (*fig. 12*) choisi par Listing se retrouve dans le séminaire du 17 février 1976 du Docteur Lacan<sup>2</sup>, où ce dernier l'appelle, en s'en excusant, le « nœud de Lacan ». Il est remarquable qu'à l'inverse, le « bien connu » nœud de Listing ne figure pas dans cet article. Ajoutons pour l'instant que le nœud de la *figure 12* présente la propriété topologique éminente d'avoir comme surface, dont il est bord (surface d'empan ou de Reidemeister dans le cas d'un nombre minimum de croisements et d'un nombre minimum de trous), une surface bilatère.

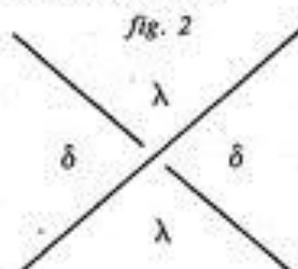
L'essentiel de l'essai de Listing, en ce qui concerne le nœud, réside dans la construction d'un invariant algébrique sous la forme de deux polynômes attachés à chaque nœud. Pour y parvenir, il nomme par une même lettre les zones deux à deux opposées par le sommet autour d'un croisement donné. Cette situation correspond au point nodal.



1. J.-M. VAPPÉREAU, « Calcul dans les champs du nœud », *Ornicar ?*, n° 28, 1984, p. 133-143.

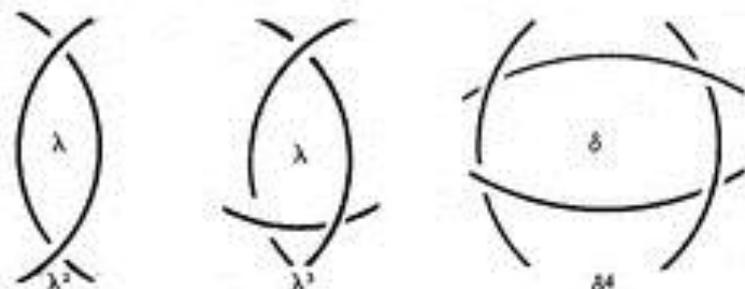
2. « Le sinthome », *Ornicar ?*, n° 8, 1976, p. 14 et 16.

Signalons qu'un mouvement différent donne lieu à une notation qui se déduit de la précédente



La *figure 2* s'obtient à partir de la *figure 1* par un quart de tour dans le plan. Si on reporte cette convention de lettres à chaque croisement dans la présentation plane d'un nœud, on obtient un chiffrage des zones. Deux cas peuvent se présenter : ou les zones ont un chiffrage hétérogène (les deux lettres  $\delta$  et  $\lambda$  se trouvent alors dans une même zone), ou on a un chiffrage homogène, auquel cas on n'écrit qu'une occurrence de la lettre dans la zone. Le second cas se rencontre lorsque le nœud est alterné. La construction des deux polynômes rend compte du nombre de croisements adjacents à chaque zone que l'on note en puissance de la lettre qui marque la zone. Il y a des zones de même type qui se trouvent ainsi distinguées dans un nœud alterné.

zones :



types :

$\lambda^2$

$\lambda^3$

$\delta^4$

Chaque polynôme est une combinaison linéaire de ses types de zones. Il y a un polynôme en  $\lambda$  et un polynôme en  $\delta$ , les coefficients donnent le nombre de chaque type de zones présentes dans le nœud.

Le chiffrage des zones peut être obtenu par un quotient du groupe fondamental<sup>1</sup>.

Et cela se dessine à la manière de Listing dans une présenta-

1. M. GRUN-RÉHOMME, « Aperçu sur la théorie mathématique des nœuds », *Ornicar ?*, n° 20/21, p. 27-29.

tion de Denh de ce groupe<sup>1</sup> ; ce chiffrage correspond à une surface dite de Reidermeister (ou d'empan)<sup>2</sup> et il y a une surface pour chacun des deux polynômes.

La recherche d'invariants algébriques pour chaque nœud a permis de dresser une table des nœuds premiers<sup>3</sup>.

Cette table des nœuds peut être reconsidérée dans son articulation interne à partir des remarques topologiques de Lacan, qui nous ramène à ce qui semble bien n'être encore qu'une intuition chez Listing. Ainsi, la transformation décrite par Lacan dans *L'Etourdit*<sup>4</sup>, qui consiste à découper un tore, puis à le recoller de façon à produire une bande de Möbius, permet de mettre en évidence, à propos de chaque nœud, en invariant : la coupure, qui réorganise la table des nœuds premiers. Le nœud devient coupure ; le nœud se réduit à la coupure.

#### *Des complexions linéaires planaires ou sphéroïdales*

Au terme de ces études, quittons le point nodal pour des complexions linéaires immergées dans le plan, c'est-à-dire ne présentant pas de croisements, mais des entrecroisements.

Listing traite, à ce propos, de deux problèmes distincts : l'étude des trajets ou chemins qui parcourent la complexion dans son tracé, et l'étude des zones délimitées dans le plan par ces complexions planes.

Il donne une esquisse de résultats qu'il établit ici par tâtonnements, mais qui seront repris plus tard dans la théorie des graphes. La notion de graphe eulérien étant un cas particulier des résultats de Listing, puisqu'il s'agit pour lui de décider du nombre de traits distincts nécessaires et suffisants pour tracer une quelconque complexion. Il s'occupe bien du nombre d'arcs adjacents à chaque sommet en fonction de leur parité\*. En théorie

1. J.-M. VAPPÉREAU, « Calcul dans les champs du nœud », *Ornicar ?*, n° 28, 1984, p. 133-143.

2. J.-M. VAPPÉREAU, « Deux usages du calcul dans les champs d'existence du nœud », *Ornicar ?*, n° 31, 1984, p. 166-172.

3. D. ROLFSEN, *Knots and Links*, 1976, Publish or Perish Inc.

\* Il est intéressant de comparer ce résultat de la théorie des graphes à la technique arithmétique qu'emploie Euler pour résoudre le problème des ponts de Koenigsberg dans son article de 1736 paru dans *Ornicar ?*, n° 24, p. 233-241.

des nœuds, ce résultat permet de décider si une complexion est la projection d'un nœud ou d'une chaîne.

On retrouve les résultats relatifs à la valuation des zones (esquissés ici par Listing) dans la théorie des fonctions analytiques sous la forme de l'indice d'un point par rapport à un lacet. Cette notion permet de définir le cadre exact du théorème de Cauchy, moyennant des critères fins d'analyticité des fonctions. Il est à noter que l'on peut rencontrer plus simplement ces résultats de manière algébrique, grâce au quotient du groupe fondamental des nœuds dont la complexion linéaire serait une projection plane. Encore faudrait-il revenir à l'aspect précédent par l'introduction de surcroisements en chaque intercroisement, de manière arbitraire et suffisante, afin de vérifier ce résultat.

Nous espérons avoir suffisamment souligné les grandes lignes simples et effectives empruntées par Listing dans son approche modale de l'espace. La topologie algébrique la plus récente retrouve le style de Listing d'une façon mieux établie dans les structures algébriques. Plus proche par là de cette démarche que les résultats analytiques qui nous en séparent.   la manière de Dupin dans *La lettre volée* d'E. Po , à identifier le bon endroit de la structure, les résultats pertinents se trouvent mieux qu'à découper l'espace en petits morceaux, comme le fait la police qui en trouve rien. Rappelons-nous l'aventure clinique de R. Jakobson, qui donne un tableau effectif des aphasies en s'appuyant sur sa propre poétique, au lieu de s'attarder à des localisations cérébrales. La clinique psychanalytique est de cet ordre, qui se préoccupe de l'« enveloppe formelle du symptôme »<sup>1</sup>. Les détails s'organisent à partir de cette position de principe, cohérents avec la structure. Lacan met des lettres dans les zones de la mise à plat de la chaîne borroméenne, il math matise avec son algèbre, formée d'un petit nombre de lettres ( $\alpha$ -JA-J $\Phi$ ), la topologie de la chaîne. Pour dégager ce qu'il en est de la lecture d'une « inscription chiffonnée »<sup>2</sup>, il faut avoir l'idée de s'int -

1. J. LACAN, * crits*, p. 66.

2. J. LACAN, « Introduction à l'édition des * crits* en livre de poche », * crits I*, « Points », Seuil, 1966, p. 11.

resser au nœud du bord de ce chiffon, de distinguer le symbolique de l'imaginaire.

Laissons maintenant le lecteur découvrir le texte de Listing, et en extraire par la suite d'autres éléments sans doute essentiels à une pratique de la lettre.

## Bibliographie de Johann Benedict Listing

Né le 25 juillet 1808 à Francfort-sur-le-Main, élève de Gauss puis docteur en Philosophie, Johann Benedict Listing devient l'assistant de Sartorius Von Waltershausen à l'occasion des recherches de ce dernier sur l'Etna.

En 1837, il est nommé professeur de Mécanique à l'Institut des Arts et Métiers de Hanovre, puis professeur extraordinaire en 1839 et professeur ordinaire de Physique en 1847 à l'Université de Göttingen.

Membre de multiples sociétés savantes, il réalise des travaux sur l'optique physiologique dès 1845, les *Études préliminaires à la topologie* en 1847, et d'autres travaux parmi lesquels il faut citer, en 1855, *le Dosage du sucre dans l'urine des diabétiques*, en 1871, *le Prisme de réflexion*, et en 1878, *la Forme et les Dimensions terrestres*.

Son important travail sur *le Recensement des complexes spatiaux ou la généralisation du Théorème d'Euler sur les Polyèdres* date des années 1861-1862.

Il sera suivi, en 1864, à partir de données météorologiques enregistrées pendant dix ans à Göttingen, de son écrit *Remarques sur un halo terrestre du soleil observé en Russie avec des remarques sur l'eau cristallisée*.

Listing donnera également plusieurs travaux sur l'optique en 1869, 1870 et 1871.

Il meurt le 24 décembre 1882 à Göttingen.

Cette bibliographie sommaire a été établie à partir des éléments biographiques contenus dans *Poggendorffs Handwörterbuch*, tomes I et II.

# Études préliminaires à la topologie

par Johann Benedict Listing

*Traduit de l'allemand par Claude Léger et Michael Turnheim*

**L**est possible de distinguer, dans l'examen des formations spatiales, deux points de vue généraux ou catégories, à savoir la quantité et la modalité\*. Les recherches sur la géométrie, dans l'état actuel de leur développement, et si différentes puissent-elles être dans leurs objets autant que dans leurs méthodes, ont toujours donné la prévalence à la première de ces catégories, en conséquence de quoi la géométrie a été considérée de tous temps comme une partie de la science des grandeurs ou de la mathématique en se référant, ainsi d'ailleurs que son nom l'indique à juste titre, au concept de mesure. Le second point de vue, la modalité ou considération de toutes les questions ayant trait à la situation et à la succession, est mise le plus souvent au second plan en géométrie, à moins que celle-ci n'ait réussi à rapporter cette catégorie à la grandeur ou à la lier à elle. La méthode des coordonnées cartésiennes et la géométrie analytique qui en est issue, de même que l'application des grandeurs imaginaires et complexes aux considérations géométriques, en sont des exemples parlants. Par ailleurs, dans la géométrie des Anciens, tout comme dans les plus récents progrès accomplis dans le même sens, aussi bien d'ailleurs que dans ce qu'il est

\* Paru sous le titre original : *Vorstudien zur Topologie*, Göttinger Studien, 1847, Erste Abteilung : Mathematische und naturwissenschaftliche Abhandlungen ; Göttingen.

convenu d'appeler géométrie descriptive où l'on se meut sans l'aide du calcul analytique mais uniquement dans le champ de l'intuition spatiale, il n'a jamais été question de faire de la prise en considération des rapports modaux un sujet délimité ni exclusif, encore que ceux-ci aient été la plupart du temps impliqués dans les opérations avec des grandeurs spatiales ou pour ainsi dire supportés par elles.

Il semble qu'on puisse trouver pour la première fois l'idée d'un traitement spécifique et quasi calculatoire de l'aspect modal de la géométrie, dans des énoncés occasionnels de Leibniz, où il est question d'une sorte d'algorithme au moyen duquel on devrait pouvoir soumettre à l'analyse la situation des formations spatiales comme cela se fait au moyen de l'algèbre pour tout ce qui concerne la grandeur<sup>1</sup>. Par la suite, on prit connaissance d'un spécimen de la nouvelle caractéristique géométrique de Leibniz, qui était essentiellement fondée sur le concept de congruence, sans posséder pour autant de contenu modal proprement dit. Aussi la nouvelle analyse géométrique de Grassmann, laquelle procède du spécimen leibnizien, de même que le calcul barycentrique de Möbius, sont-ils les seuls à pouvoir être considérés à proprement parler comme un enrichissement de la géométrie ; cela vaut également pour la « géométrie de position » de Carnot, qui se rattache à la « géométrie descriptive »\* élaborée par Monge.

Par contre, le problème bien connu du « saut du cavalier », qui a été scientifiquement résolu par Euler, puis ultérieurement

1. Leibniz écrit à Huyghens, dans une lettre datée de 1679 : « mais après tous les progrès que j'ai faits en ces matières, je ne suis pas encor content de l'Algèbre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ny les plus belles constructions de Géométrie. C'est pourquoi lorsqu'il s'agit de cela, je croy qu'il nous faut encore une autre analyse proprement géométrique ou linéaire qui nous exprime directement situm, comme l'Algèbre exprime magnitudinem. Et je croy d'en voir le moyen et qu'on pourrait représenter des figures et mesme des machines et mouvements en caractères, comme l'Algèbre représente les nombres ou grandeurs : et je vous envoie un essay qui me paroist considérable. » Voir : *Christiani Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae, ex manuscriptis in bibliotheca academiae Lugduno-Batavae servatis edidit P.J. Uylenbroek*, fasc. I, p. 9. In fasc. II, p. 6, on trouve la communication de l'essai de Leibniz, découvert dans l'héritage de Huyghens.

\* En français dans le texte.

par d'autres, se tient dans une plus grande proximité avec la géométrie de situation ; les réflexions consacrées à ce problème par Vandermonde, dans ses « Remarques sur les problèmes de situation »<sup>1</sup>, sur le trajet que doit suivre un fil pour représenter par exemple une tresse ou les mailles d'un manchon, trouvent tout à fait leur place ici. De même, une proposition mentionnée par Clausen dans les *Astronomische Nachrichten*, n° 494 (mais sans preuve).

Abstraction faite de ces quelques références, la partie modale de la géométrie attend toujours son élaboration et son développement. Il est étrange que depuis l'impulsion inaugurale suscitée par Leibniz, rien de plus n'ait été apporté à cette branche du savoir ; cela peut s'expliquer d'une certaine façon par la difficulté à trouver des méthodes plus efficaces et plus utiles pour ramener des intuitions spatiales à des concepts, et par l'insuffisance de la langue à désigner scientifiquement ces concepts, dont le matériel servant à leur élaboration recèle souvent des imbroglios considérables. Rendu maintes fois attentif à l'importance du sujet par le plus grand géomètre du moment, nous nous sommes essayés, depuis assez longtemps et de diverses façons, à l'analyse de quelques cas qui ont leur place ici, et pour lesquels les sciences de la Nature et leurs applications trouvent de multiples occurrences ; et tandis que nous osons déjà en communiquer quelques éléments dans ces études préliminaires à la nouvelle science, et avant même que ces considérations puissent prétendre à une forme et à une méthode rigoureusement scientifiques, notre seule ambition est d'attirer l'attention, à l'aide de rudiments propédeutiques, d'exemples et de matériels, sur les possibilités et l'importance de cette science.

Permettons-nous d'user pour ce type de recherches sur les formations spatiales, du terme de « topologie » plutôt que de l'appellation de *geometria situ* proposée par Leibniz, laquelle évoque le concept de mesure, qui est ici entièrement subordonné et crée une confusion avec le terme de « géométrie de position »\* déjà utilisé couramment pour une toute autre espèce

1. *Histoire de l'Académie royale des Sciences*, année 1771, page 566.

\* En français dans le texte.

de considérations géométriques. Sous le nom de *topologie*, nous devons donc comprendre l'étude des rapports modaux concernant les formations spatiales ou celle des lois qui régissent la connexion, la situation réciproque et la succession des points, des lignes, des surfaces, des corps et de leurs parties ou de leurs agrégats dans l'espace, abstraction faite de tout rapport de mesure et de grandeur. Grâce au concept de succession, qui est étroitement apparenté à celui de mouvement, la topologie entretient avec la mécanique une relation semblable à celle qu'elle a avec la géométrie où, là encore, la vitesse progressive ou la vitesse angulaire du mouvement tournant, de même que la masse, la grandeur du mouvement, les forces ou les moments ne sont bien entendu pas pris en considération essentielle selon leur quantité, mais uniquement selon les rapports modaux entre formations mobiles ou mues dans l'espace.

Pour atteindre au rang de science exacte auquel elle semble aspirer, la Topologie devra réduire les faits de l'intuition spatiale à des concepts les plus simples possibles, avec lesquels elle accomplira les opérations, quasiment comme en calcul, à l'aide de signes et de symboles appropriés et choisis par analogie avec ceux de la mathématique, selon des règles simples.

### *De la position*

Nous commencerons par une considération préliminaire simple, prise par analogie avec la théorie combinatoire et s'appuyant sur le schéma des trois dimensions de l'espace. Chaque objet spatial peut en effet être affecté de trois droites se croisant à angle droit à l'intérieur de celui-ci et à partir desquelles nous pouvons différencier les uns des autres, ses dimensions et ses côtés. Dans les cas concrets, on utilise habituellement plusieurs appellations pour ces dimensions et ces côtés, appellations dont l'intérêt est plus évident pour la topologie que pour la géométrie. Pour l'espace illimité, à un endroit quelconque de la surface de la terre, c'est la ligne de sonde qui s'y prêtera le plus naturellement, avec les deux directions opposées : haut et bas,

la ligne méridienne (horizontale) comprenant le Sud et le Nord<sup>1</sup>, et la ligne horizontale perpendiculaire aux deux autres avec l'Ouest et l'Est ; pour une maison, ce seront sa hauteur avec le haut et le bas, le devant et le derrière, la droite et la gauche, etc. Si nous désignons le point de croisement par O, et trois points arbitrairement choisis sur les trois axes de dimension par les nombres ordinaux 1, 2, 3 — considérés comme positifs en l'absence de tout signe — et trois autres points choisis sur les axes du côté opposé au point zéro par les nombres (négatifs)  $\bar{1}$ ,  $\bar{2}$ ,  $\bar{3}$ , de telle façon que les nombres de même valeur mais possédant des signes opposés appartiennent respectivement au même axe, alors  $O\bar{1}$  et  $O1$  désigneront les côtés opposés de la première dimension, de même que  $O\bar{2}$  et  $O2$  désigneront ceux de la deuxième et enfin  $O\bar{3}$  et  $O3$  ceux de la troisième.

Prenons par exemple un dé de jeu ordinaire (dont les faces portent, comme il est de règle, les numéros 1 à 6 répartis de telle façon que la somme de deux faces opposées soit toujours 7), imaginons O comme étant situé au milieu du dé, et qu'au lieu des nombres un, deux, trois, quatre, cinq et six, soient respectivement inscrits sur les faces de ce dé les chiffres 1, 2, 3,  $\bar{3}$ ,  $\bar{2}$ ,  $\bar{1}$ . Deux corps A et B ainsi munis de leurs signes de dimension peuvent maintenant être disposés côte à côte ou bien l'un dans l'autre de telle façon que chacun des trois axes de l'un soit orienté de la même façon que chacun des trois axes de l'autre. De telles dispositions peuvent être appelées (au sens étroit du terme) *positions*, et, dans le cas où les axes ne coïncident pas, nous ne prendrons pas plus en considération la situation de la ligne de droite qui relie les points zéro par rapport aux axes que la grandeur de cette ligne. La position de B par rapport à A sera simplement désignée par  $\text{pos}(A)B$  ; de même, celle de A par rapport à B le sera par  $\text{pos}(B)A$ . La détermination topologique d'une position B par rapport à A se fait au moyen d'une forme comportant les trois chiffres 1, 2, 3, dans n'importe quel ordre et avec des signes quelconques, forme dans laquelle les trois

1. La détermination des quatre régions du ciel ne serait possible que sous les deux pôles géographiques et les deux lignes horizontales devraient alors être fixées à partir d'objets terrestres choisis arbitrairement.

chiffres indiquent, selon l'ordre choisi, ceux des trois côtés de B qui sont orientés de la même façon que les côtés 1, 2, 3 de A ou qui « conspirent »\* avec ces derniers. Si donc par exemple la position

$$\text{pos}(A)B = 2 \bar{3} \bar{1}$$

nous était donnée, B serait alors par rapport à A dans une position telle que les côtés 2,  $\bar{3}$ ,  $\bar{1}$  de B coïncideraient respectivement avec les côtés 1, 2, 3 de A. Pour chaque position, les trois chiffres de la forme 1, 2, 3 peuvent ainsi être considérés comme des *indices* ou numéros des places.

Il est évident que toutes les positions possibles d'un corps B par rapport à un autre corps A doivent apparaître dans les quarante-huit formes qu'il est possible de constituer par changement des positions et des signes de façon permutatoire et qui sont réunies dans le tableau suivant :

1 2 3	2 3 1	3 1 2	$\bar{3} \bar{2} \bar{1}$	$\bar{2} \bar{1} \bar{3}$	$\bar{1} \bar{3} \bar{2}$
1 $\bar{2}$ $\bar{3}$	2 $\bar{3}$ $\bar{1}$	3 $\bar{1}$ $\bar{2}$	$\bar{3} \bar{2} \bar{1}$	$\bar{2} \bar{1} \bar{3}$	$\bar{1} \bar{3} \bar{2}$
$\bar{1}$ 2 $\bar{3}$	$\bar{2}$ 3 $\bar{1}$	$\bar{3}$ 1 $\bar{2}$	3 $\bar{2}$ $\bar{1}$	2 $\bar{1}$ $\bar{3}$	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$
$\bar{1}$ $\bar{2}$ 3	$\bar{2}$ $\bar{3}$ 1	$\bar{3}$ $\bar{1}$ 2	3 2 $\bar{1}$	2 1 $\bar{3}$	1 3 $\bar{2}$
$\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$	$\bar{2}$ $\bar{3}$ $\bar{1}$	$\bar{3}$ $\bar{1}$ $\bar{2}$	3 2 1	2 1 3	1 3 2
$\bar{1}$ 2 3	$\bar{2}$ 3 1	$\bar{3}$ 1 2	3 $\bar{2}$ $\bar{1}$	2 $\bar{1}$ $\bar{3}$	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$
1 $\bar{2}$ 3	2 $\bar{3}$ 1	3 $\bar{1}$ 2	$\bar{3}$ 2 $\bar{1}$	$\bar{2}$ 1 $\bar{3}$	$\bar{1}$ 3 $\bar{2}$
1 2 $\bar{3}$	2 3 $\bar{1}$	3 1 $\bar{2}$	$\bar{3}$ $\bar{2}$ 1	$\bar{2}$ $\bar{1}$ 3	$\bar{1}$ $\bar{3}$ 2

Lorsqu'on réalise effectivement l'ensemble des positions dans lesquelles il est possible de placer deux corps l'un par rapport à l'autre après en avoir fixé les axes de position, on s'aperçoit qu'on ne peut réaliser *que* les vingt-quatre formes du haut ou *que* les vingt-quatre formes du bas. Si en effet nous disons que  $c$  représente un des deux chiffres 3 et  $\bar{3}$ , et si nous amenons deux corps dans la position 1 2  $c$ , alors le choix entre ces deux valeurs pour définir  $c$  ne demeure possible que tant que nous nous permettons d'échanger 3 avec  $\bar{3}$  dans l'un des deux corps ou de renverser son troisième axe sur lui-même. La valeur qui occuperait

\* *Conspirieren* dans l'original.

alors, dans la forme de position  $1\ 2\ c$ , la troisième position  $c$ , dépend, en fonction de cela, de la situation réciproque des quatre points 0, 1, 2, 3 dans chacun des deux corps. Si nous imaginons maintenant, à la place du point zéro, un individu dont le sommet du crâne est orienté vers le point 1 et le visage vers le point 2, alors le point 3 se situera soit du côté droit, soit du côté gauche. La situation réciproque des trois axes de position est appelée, dans le cas où 3 se situe à droite, une position d'axe *droit* et dans le cas où 3 se situe à gauche, une position d'axe *gauche* ; deux positions d'axe droit ou deux positions d'axe gauche sont appelées deux à deux *homologues* ; une droite et une gauche, *hétérologues*. La position d'axe droit est homologue avec celle que nous obtenons quand nous plaçons 0 en un point à la surface de la terre, 1 au zénith, 2 vers le Sud et 3 vers l'Ouest ; la position de gauche, avec celle où 0 se situe au soleil, 1 au pôle Nord de l'écliptique, 2 au point zéro du Bélier et 3 au point zéro du Cancer. Si nous prenions maintenant des pièces de monnaie identiques, portant une inscription sur la tranche et que nous plaçons 1 sur la face imagée, 2 et 3 sur la tranche de sorte que l'inscription coure dans le sens  $2, \bar{3}, \bar{2}, 3$ , nous obtiendrons alors, et ce même pour des pièces d'un millésime identiques, tantôt des positions d'axe droit, tantôt des positions d'axe gauche<sup>1</sup> ; de même pour les dés de jeu, si on les chiffre de la façon qui a été mentionnée plus haut.

Nous sommes donc autorisés à dire à présent que deux corps admettent toujours vingt-quatre positions et vingt-quatre seulement ; ce sont en effet celles qui sont contenues dans la première section du tableau précédent lorsque leurs positions d'axe sont homologues, et dans la deuxième section lorsqu'ils ont des positions d'axe hétérologues. Nous appellerons les vingt-quatre premières positions *positives*, les vingt-quatre autres *negatives*. On considérera comme positions primaires, pour celles-là :  $1\ 2\ 3$  ; pour celles-ci :  $\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}$ . Ces différentes formes sont ordonnées

1. Cela ne peut bien entendu être le cas que là où, comme c'est l'usage, les pièces de monnaie ont la possibilité de perdre, entre le crénelage et la frappe, leur situation concordante, mais non point là où les deux manœuvres ont lieu simultanément, comme avec la machine à frapper la monnaie de Droz.

dans le tableau précédent, de telle façon qu'à chaque position positive de la section haute corresponde une position négative dans la section du bas, laquelle est produite par changement de l'ensemble des trois signes. Ces deux sections se décomposent l'une et l'autre en six colonnes, dont chacune contient huit positions : quatre positives et quatre négatives, qui ne se distinguent que par les signes de leurs membres. L'ordre des trois membres dans les positions des trois premières colonnes où la suite répond du schéma 1, 2, 3, 1, 2, peut être appelé *l'ordre montant* ; celui des trois dernières colonnes, selon le schéma 3, 2, 1, 3, 2 : *l'ordre descendant*. Dans les douze premières positions positives et dans les douze dernières négatives, on trouve un nombre pair (0 ou 2) de membres négatifs ; dans les autres, un nombre impair (1 ou 3).

Après ces remarques, il est aisé de s'apercevoir que chaque position donnée change son propre signe par changement du signe d'un seul de ses membres ou des trois (à savoir qu'elle devient négative lorsqu'elle était positive et vice versa), mais qu'elle conserve son signe par le changement de signe de deux de ses membres ; en outre, la permutation des signes est sans influence sur le signe de la position, mais par contre, la permutation des membres ne reste sans influence sur le signe de la position que tant que l'ordre des membres n'est pas renversé en son opposé. Puisque chaque forme de position donnée se laisse dériver par changement de signe et déplacement de membre à partir de la position primaire positive, il est alors facile de reconnaître si cette forme est positive ou négative, et ce, bien entendu, sans l'aide du tableau ni par essai intuitif. Ainsi la position  $\bar{1} \bar{3} \bar{2}$  doit nécessairement être positive en raison de l'ordre qui est descendant et du nombre impair de membres négatifs ; de même  $\bar{2} \bar{3} \bar{1}$  doit-il nécessairement être positif en raison de l'ordre montant et des deux signes moins ; à l'inverse,  $2 \ 1 \ 3$ , en raison de l'ordre descendant et en l'absence de signe moins, ainsi que  $\bar{3} \ \bar{1} \ \bar{2}$  qui a un ordre montant et un triple signe moins, sont des positions négatives. Le troisième membre d'une forme de position  $a \ b \ c$  dans laquelle deux membres nous sont donnés avec le signe de la position, se laissera découvrir avec la même facilité. Si par exemple deux corps ayant tous deux une position

d'axe gauche, sont en position  $\bar{3} b 2$ , on aura alors  $b = \bar{1}$  puisque l'ordre doit être montant et la position, positive.

*Intervertir\** une position donnée de B en A revient à dire qu'on fait dériver d'elle la position de A en B. Cela s'obtient en échangeant les membres de la position donnée ainsi que leurs indices (correspondant à la position primaire positive), en transférant les signes moins existants, à partir des nouveaux indices, aux membres nouveaux et enfin en ordonnant ceux-ci selon les indices.

Si l'on doit intervertir par exemple

$$\text{pos (A)B} = \bar{2} \bar{3} \bar{1},$$

on devra mettre, au lieu du membre  $\bar{1}$  qui se trouve à la troisième place,  $\bar{3}$  à la première place ; au lieu du membre  $\bar{2}$  qui se trouve à la première place,  $\bar{1}$  à la deuxième place ; et au lieu du membre 3 qui se trouve à la deuxième place, 2 à la troisième ; on obtient ainsi

$$\text{pos(B)A} = \bar{3} \bar{1} 2$$

De la même façon, on obtiendrait naturellement à nouveau la position de départ par simple inversion à partir de cette position inversée.

Il résulte du concept d'inversion que la position inversée doit avoir le même signe que la position originelle et le même nombre de signes moins dans sa forme, donc également le même ordre dans la suite de ses membres.

Quelques positions ne modifient pas leur forme par inversion, comme tel est par exemple le cas pour la position primaire positive 1 2 3, puisque tout corps est avec lui-même dans cette position ; ces positions expriment ainsi le même rapport de positions mutuelles entre deux corps. Du concept d'inversion découlent aussi les conditions par lesquelles une position reste inchangée par inversion, c'est-à-dire est *réciproque*. Dans la première colonne du tableau des quarante-huit positions, tous les membres sont homonymes avec leurs indices, comme dans la position primaire ; ici, en cas d'inversion, tout membre doit alors rester à sa place avec son signe. Dans les deux sections, les quatre positions de la première colonne sont aussi toutes récipro-

\* *Invertieren*.

ques. Dans les quatrième, cinquième et sixième colonnes, pour chaque forme, un seul membre apparaît homonyme avec son indice et garde donc la place précédente, accompagné de son signe : mais les deux autres membres qui ont échangé leurs indices ne réapparaîtront, en cas d'inversion, à la même place et sans changement de signe, que s'ils ont les mêmes signes. Dans les deux sections on ne trouve alors, parmi les quatre positions des trois dernières colonnes, que deux qui soient réciproques. Dans les deuxième et troisième colonnes enfin, où aucun membre n'est homonyme avec son indice, on ne peut rencontrer aucune position réciproque. Il existe donc au total vingt positions réciproques, c'est-à-dire

**dix positions réciproques positives :**

1 2 3			
1 $\bar{2}$ $\bar{3}$	$\bar{3}$ $\bar{2}$ $\bar{1}$	$\bar{2}$ $\bar{1}$ $\bar{3}$	$\bar{1}$ $\bar{3}$ $\bar{2}$
$\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$	3 $\bar{2}$ 1	2 1 $\bar{3}$	$\bar{1}$ 3 2
$\bar{1}$ $\bar{2}$ 3			

**dix positions réciproques négatives :**

$\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$			
$\bar{1}$ 2 3	3 2 1	2 1 3	1 3 2
1 $\bar{2}$ $\bar{3}$	$\bar{3}$ $\bar{2}$ $\bar{1}$	$\bar{2}$ $\bar{1}$ $\bar{3}$	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$
1 2 $\bar{3}$			

Les quatorze positions non réciproques restantes de chaque section, groupées selon leur liaison les unes avec les autres par inversion, sont

**sept paires de positions positives :**

2 3 1	3 1 2
2 $\bar{3}$ $\bar{1}$	$\bar{3}$ 1 $\bar{2}$
$\bar{2}$ 3 $\bar{1}$	$\bar{3}$ $\bar{1}$ 2
$\bar{2}$ $\bar{3}$ 1	3 $\bar{1}$ $\bar{2}$
$\bar{3}$ 2 1	3 2 $\bar{1}$
$\bar{2}$ 1 3	2 $\bar{1}$ 3
1 $\bar{3}$ 2	1 3 $\bar{2}$

sept paires de positions négatives :

$\overline{2} \overline{3} \overline{1}$	$\overline{3} \overline{1} \overline{2}$
$\overline{2} \overline{3} \overline{1}$	$\overline{3} \overline{1} \overline{2}$
$\overline{2} \overline{3} \overline{1}$	$\overline{3} \overline{1} \overline{2}$
$\overline{2} \overline{3} \overline{1}$	$\overline{3} \overline{1} \overline{2}$
$\overline{3} \overline{2} \overline{1}$	$\overline{3} \overline{2} \overline{1}$
$\overline{2} \overline{1} \overline{3}$	$\overline{2} \overline{1} \overline{3}$
$\overline{1} \overline{3} \overline{2}$	$\overline{1} \overline{3} \overline{2}$

On nommera positions successives ou *consécutives*, celles qui expriment pour une série de corps A, B, C, ... la position du deuxième par rapport au premier, du troisième par rapport au deuxième, du quatrième par rapport au troisième, etc. Sont alors dites consécutives, les positions pos(A)B, pos(B)C, pos(C)D ; et lorsque pos(B)C = 1 2 3, c'est-à-dire si B et C s'égalent positionnellement, sont alors également dites consécutives les positions pos(A)B et pos(C)D. Il est évident que chaque inversion engendre des positions consécutives si deux positions non consécutives ont en commun un élément ou (ce qui revient au même). Si un élément de l'une se trouve avec un élément de l'autre dans la position primaire primitive, il est alors possible de le rendre consécutif par réordonnancement ou par inversion. Ainsi s'ensuivent, à partir par exemple des positions pos(B)C, pos(A)B, par simple inversion de leur ordre ou par inversion des deux, les positions consécutives pos(A)B, pos(B)C ou pos(C)B, pos(B)A ; les positions pos(D)E, pos(F)E deviennent consécutives par inversion de la seconde ; pos(G)H, pos(G)K deviennent consécutives, quant à elles, par inversion de la première.

La sommation des positions consécutives consiste en la dérivation d'une position du dernier élément vers le premier dans la série des éléments auxquels se réfèrent les positions données. La somme de pos(A)B, pos(B)C, pos(C)D, pos(D)E sera alors pos(A)E, ce qui peut s'exprimer symboliquement de la façon suivante :

$$\text{pos(A)B} + \text{(B)C} + \text{(C)D} + \text{(D)E} = \text{pos(A)E}.$$

Dans la mesure où seules des positions consécutives sont capables de sommation, l'expression

$$\text{pos(A)B} + \text{(C)D} + \text{(E)F} = \text{pos(A)F}$$

n'a de signification que dans le cas où  $\text{pos}(B)C = \text{pos}(D)E = 1\ 2\ 3$  et où, dans la série A, B, C, D, E, F, les deuxièmes et troisièmes éléments d'une part, et les quatrième et cinquième éléments d'autre part sont positionnellement identiques. Si la position primaire positive apparaît alors dans un nombre quelconque de positions consécutives, elle peut à chaque fois être retranchée de la série sans effet sur la somme. Lorsqu'on doit faire la somme des positions données par leurs formes, cela implique alors nécessairement que l'on suppose ces positions consécutives.

On effectuera l'évaluation de la somme des positions consécutives qui nous sont données par leurs formes, selon un triple parcours des membres de chaque forme, au cours duquel on mettra pour plus de commodité les formes les unes au-dessous des autres. On négligera provisoirement tous les signes moins ; en procédant ainsi, le premier membre de la somme coïncide avec le membre de la dernière position auquel on aboutit si l'on a parcouru successivement, en partant du premier membre de la première position, les positions consécutives, à condition qu'à chaque étape, on passe dans la forme suivante par l'élément dont l'indice est homonyme avec l'élément rencontré à la forme précédente. On trouvera de la même façon le deuxième élément de la somme en partant du deuxième élément de la première position.

$$\begin{aligned} \text{Si l'on a par exemple : } \text{pos}(A)B &= \bar{3}\ \bar{2}\ 1 \\ \text{pos}(B)C &= 1\ \bar{3}\ \bar{2} \\ \text{pos}(C)D &= 2\ 1\ \bar{3} \\ \text{pos}(D)E &= 3\ \bar{1}\ 2 \end{aligned}$$

$$\text{la somme sera} \qquad \text{pos}(A)E = 3\ \bar{2}\ \bar{1}$$

Les opérations se décomposent de la façon suivante : pour le premier membre :  $\bar{3}, \bar{2}, 1, 3$  (ce qui donne 3) ; pour le deuxième membre :  $\bar{2}, \bar{3}, \bar{3}, 2$  (ce qui donne  $\bar{2}$ ) ; et pour le troisième :  $1, 1, 2, \bar{1}$  (ce qui donne  $\bar{1}$ ). Du concept d'assemblage des positions consécutives, s'ensuit naturellement que le signe de la somme résulte du signe de chacun des membres de cette somme ; ainsi, dans l'exemple cité, la troisième forme étant positive et les trois autres négatives, il en résulte une somme négative.



— premièrement, les huit positions positives :

$$\begin{array}{cc} 2 \ 3 \ 1 & 3 \ 1 \ 2 \\ 2 \ \bar{3} \ \bar{1} & \bar{3} \ 1 \ 2 \\ \bar{2} \ 3 \ \bar{1} & \bar{3} \ \bar{1} \ 2 \\ \bar{2} \ \bar{3} \ 1 & 3 \ \bar{1} \ \bar{2} \end{array}$$

qui donnent, triplées, 1 2 3. Si une de ces huit positions est consécutivement commune à la série des éléments A, B, C, D... en son entier, dans ce cas les quatrième, septième, dixième, etc. éléments seront positionnellement orientés avec le premier élément ; de la même façon, les cinquième, huitième, onzième, etc. éléments seront orientés avec le deuxième ; et les sixième, neuvième, douzième, etc., avec le troisième.

— deuxièmement, les huit positions négatives :

$$\begin{array}{cc} \bar{2} \ \bar{3} \ \bar{1} & \bar{3} \ \bar{1} \ \bar{2} \\ \bar{2} \ 3 \ 1 & 3 \ \bar{1} \ 2 \\ 2 \ \bar{3} \ 1 & 3 \ 1 \ \bar{2} \\ 2 \ 3 \ \bar{1} & \bar{3} \ 1 \ 2 \end{array}$$

qui donnent, triplées,  $\bar{1} \ \bar{2} \ \bar{3}$  et multipliées par six, 1 2 3. Si tous les membres de la série A, B, C, etc., qui doivent dans ce cas avoir alternativement des positions d'axe gauche et droit, se trouvent consécutivement dans une de ces huit positions, alors les quatrième, dixième, seizième, etc. membres se trouvent dans la position primaire négative avec le premier ; les cinquième, onzième, dix-septième, etc. se trouvent dans cette même position avec le deuxième, et les sixième, douzième, dix-huitième, etc., avec le troisième ; cependant les septième, treizième, dix-neuvième, etc. sont dans la position positive de base 1 2 3 avec le premier ; les huitième, quatorzième, vingtième, etc., avec le deuxième ; les neuvième, quinzième, vingt et unième, etc., avec le troisième.

— troisièmement, les six positions positives

$$\begin{array}{cc} \bar{3} \ 2 \ 1 & 3 \ 2 \ \bar{1} \\ \bar{2} \ 1 \ 3 & 2 \ \bar{1} \ 3 \\ 1 \ \bar{3} \ 2 & 1 \ 3 \ \bar{2} \end{array}$$

ainsi que les six positions négatives

$$\begin{array}{cc} 3 \ \bar{2} \ \bar{1} & \bar{3} \ \bar{2} \ 1 \\ 2 \ \bar{1} \ \bar{3} & \bar{2} \ 1 \ \bar{3} \\ \bar{1} \ 3 \ 2 & \bar{1} \ 3 \ 2 \end{array}$$

conduisent par doublement aux positions positives réciproques ; c'est-à-dire que les première, deuxième et troisième paires de chacun des deux groupes aboutissent ainsi respectivement à

$$\begin{array}{c} \overline{1} \ 2 \ \overline{3} \\ \overline{1} \ \overline{2} \ 3 \\ 1 \ \overline{2} \ \overline{3} \end{array}$$

et par quadruplement à la position primaire positive. Ici\*, le quatrième membre suivant serait donc positionnellement orienté avec le membre de départ.

Le rapport situationnel entre des objets et leurs images catoptrique et dioptrique pourrait nous servir d'exemple d'application de ces considérations sur les positions.

Dans le cas le plus simple, où, d'un objet corporel placé devant un miroir plan, surgit une image virtuelle elle aussi corporelle, derrière le miroir, image qui est comme on sait géométriquement identique dans toutes ses dimensions avec l'objet et qui ne lui est distincte que du seul point de vue topologique, dans un tel cas, nous plaçons dans l'objet un des trois axes positionnels selon la direction qui est perpendiculaire par rapport au miroir ; en conséquence de quoi les deux autres axes se trouvent dans le plan du miroir. De la sorte, si dans  $\text{pos}(A)B$ , A signifie l'objet et B son image dans le miroir, seul l'axe qui est perpendiculaire au plan du miroir voit sa position changée ou remplacée par un signe moins, tandis que les deux autres « conspirent » comme dans la position primaire positive pour ce qui concerne tant l'image que l'objet. La position  $\text{pos}(A)B$  prend ainsi une des trois formes :

$$\begin{array}{c} \overline{1} \ 2 \ 3 \\ 1 \ \overline{2} \ 3 \\ 1 \ 2 \ \overline{3} \end{array}$$

selon que c'est le premier, le deuxième ou le troisième axe qui est perpendiculaire par rapport au miroir. Cette position est en tous cas négative et repose sur des positions d'axe hétérologues dans l'objet et dans l'image en miroir correspondante.

\* Pour une série A, B, C, D, etc. (N.d.T.)

Notre image, telle que nous la percevons dans un miroir plan, a une position d'axe gauche si nous nous pensons nous-mêmes pourvus d'une position d'axe droit — 1 en haut, 2 en avant, 3 à droite. Un miroir placé au-dessus ou en-dessous de nous donne à cette image la position  $\bar{1} \ 2 \ 3$  par rapport à notre corps propre ; si ce miroir est placé devant ou derrière nous, la position sera  $1 \ \bar{2} \ 3$  ; si enfin il est placé à notre droite ou à notre gauche,  $1 \ 2 \ \bar{3}$ . Le miroir plan, lors de la composition des images à partir des éléments de l'objet qu'il copie, inverse toujours la dimension posée perpendiculairement au plan du miroir. Il se produit ainsi un corps-image qui, en raison des positions d'axe hétérologues, ne peut être orienté positionnellement ni être mis en congruence avec le corps original, et ce malgré leur concordance géométrique. En dehors des rapports géométriques, c'est-à-dire considéré d'un point de vue purement topologique, cela vaut aussi bien pour les images virtuelles engendrées par des miroirs convexes — images d'objets qui se trouvent à une distance quelconque devant ces miroirs —, que pour les images virtuelles engendrées par des miroirs concaves — images d'objets qui se trouvent à une distance plus petite que la distance focale, devant le miroir. Cependant, pour les images réelles ou fantômes qui sont produites par des miroirs concaves à partir d'objets placés à une distance plus grande que la distance focale, s'ajoute à l'inversion de la dimension parallèle à l'axe du miroir, l'inversion des deux autres dimensions perpendiculaires à cet axe, d'où il résulte pour l'image par rapport à l'objet, la position primaire négative  $\bar{1} \ \bar{2} \ \bar{3}$ .

Dans les miroirs concaves-convexes (difflexes), nous percevons, à partir d'objets éloignés de plus de la moitié du rayon de courbure de la concavité, des images pour lesquelles, en dehors de la dimension dirigée vers le miroir, une seule des deux autres apparaît inversée, à savoir celle dans laquelle la surface du miroir est concave. Ces simulacres d'images<sup>1</sup> sont ainsi dans une des positions positives  $1 \ \bar{2} \ \bar{3}$ ,  $\bar{1} \ 2 \ \bar{3}$ ,  $\bar{1} \ \bar{2} \ 3$  par rapport

1. D'un point de vue optique, elles sont pour ainsi dire simultanément réelles et virtuelles.

aux objets qui les engendrent, selon que c'est le premier, le second ou le troisième axe de l'objet qui se trouve dans la direction de la convexité du plan du miroir. Pour les objets placés à une distance inférieure à la moitié du rayon de courbure de la concavité, on retrouve du point de vue topologique ce qu'on a constaté dans le cas des miroirs plans et convexes : les images se trouvent dans une des positions négatives  $\bar{1} 2 3$ ,  $1 \bar{2} 3$ ,  $1 2 \bar{3}$ .

Pour des images dioptriques engendrées par des lentilles sphériques, on obtient de semblables constatations. Les images virtuelles d'objets observés à travers des lentilles divergentes sont toujours positionnellement orientées avec leurs objets ou se trouvent dans la position primaire positive  $1 2 3$  par rapport à eux. La même chose vaut aussi pour les images virtuelles engendrées par des lentilles convergentes, à partir d'objets qui se trouvent placés à une distance inférieure à la distance focale, comme c'est le cas pour la loupe ou le microscope simple. Cependant, les images réelles d'objets placés au-delà de la distance focale, se trouvent dans une des trois positions positives  $1 \bar{2} \bar{3}$ ,  $\bar{1} 2 \bar{3}$ ,  $\bar{1} \bar{2} 3$  par rapport à leurs objets, selon que c'est le premier, le second ou le troisième axe positionnel de l'objet qui est dans la direction de l'axe optique de la lentille. Les verres collectifs, dans un tel cas, renversent alors simultanément les deux dimensions perpendiculaires par rapport à l'axe optique, mais pas la troisième dimension qui se trouve dans l'axe optique.

Ces considérations, si élémentaires soient-elles, peuvent servir à constater avec une plus grande précision et en vue de leur usage scientifique, le sens de certaines expressions topologiques qui manquent de précision dans le langage de la vie courante. Dans les cas que nous avons considérés jusqu'à présent, nous avons rencontré des exemples d'une, de deux ou de trois inversions des dimensions d'un corps. L'inversion de deux dimensions donnait une position positive, donc une position d'axe homologue ; au contraire, l'inversion d'une ou de trois dimensions donnait des positions négatives et des positions d'axe hétérologues. Or, puisque l'inversion de deux dimensions peut être engendrée par simple changement de situation d'un même corps, et ce en faisant faire un demi-tour au corps autour du troisième axe (non inversé) pris comme axe de rotation, et puisque par

ailleurs l'inversion d'une ou de trois dimensions intervient, en raison de l'intrication de l'hétérologie avec l'inversion, pour ainsi dire dans la construction interne du corps, et puisqu'enfin par ailleurs une simple inversion de dimension se laisse transformer grâce à un demi-tour du corps en une triple inversion, il semble donc utile d'appeler *inversion\** proprement dite le cas où deux dimensions s'inversent simultanément par un demi-tour, et de réserver plutôt le terme de *perversion\*\** au cas de l'inversion d'une seule dimension ; et donc de considérer le corps, dans le cas où les trois dimensions sont toutes inversées, comme étant *simultanément perverti-inversé*. On peut noter à cette occasion que toutes les positions impliquées par ce concept (celui de situation naturelle ou primaire y étant inclus) sont contenues dans la première colonne du tableau synoptique *supra* et qu'elles appartiennent toutes aux positions réciproques.

On obtient alors d'une manière synoptique :

1 2 3	}	comme position naturelle
$\bar{1} \bar{2} \bar{3}$	}	comme positions inversées
$\bar{1} \bar{2} \bar{3}$		
$\bar{1} \bar{2} \bar{3}$		
$\bar{1} \bar{2} \bar{3}$	}	comme positions perverties
1 $\bar{2}$ $\bar{3}$		
1 2 $\bar{3}$		
$\bar{1} \bar{2} \bar{3}$		comme position pervertie-inversée.

On pourrait alors dire des miroirs plans ou convexes qu'ils donnent des images perverties, et des images des miroirs concaves qu'elles sont dans certains cas perverties, dans d'autres cas perverties et inversées en même temps. Les images des miroirs diffléxes sont dans certains cas inversées, dans d'autres au contraire perverties. Les lentilles divergentes montrent les objets uniquement dans leur position naturelle (rapetissés), les lentilles convergentes les montrent également dans certains cas dans la position naturelle (mais agrandis) et dans d'autres au contraire

\* *Umkehrung.*

\*\* *Verkehrung.*

pervertis (ils peuvent être alors soit rapetissés — télescope —, soit agrandis — microscope). Le télescope galiléen et le télescope terrestre, ce dernier étant uniquement composé de verres collectifs, montrent tous deux les objets dans leur position naturelle, alors que le télescope kepleréen les montre inversés. Parmi les quatre sortes de télescopes catoptriques, si l'on suppose qu'ils ont tous de simples oculaires agissant comme loupes ou ce qu'on nomme oculaires astronomiques, le télescope de Gregory donne des images en position naturelle, ceux de Cassegrain et de Newton, des images inversées, et celui de Herschel des images perverties-inversées. En ce qui concerne les microscopes, on peut généralement considérer la position de l'image comme naturelle pour le microscope simple (déjà mentionné ci-dessus) et comme inversée pour le microscope composé — dioptrique aussi bien que catadioptrique. Cependant, selon les particularités de construction et l'adjonction éventuelle de parties accessoires, il peut apparaître des modifications dont il n'est pas question ici de traiter de façon exhaustive. Il suffira de nous arrêter sur quelques uns des cas les plus importants ; et pour commencer, celui des microscopes pancratiques ou de dissection (notamment le microscope de Plössl et Oberhäuser) dont la disposition correspond pour l'essentiel à celle du microscope dioptrique auquel on aurait appliqué des oculaires à effet inversif : on obtient des images en position naturelle. Les inverseurs peuvent être soit composés de façon analogue à celle de l'oculaire du télescope terrestre, soit construits grâce à deux prismes de verre dont les sections principales sont perpendiculaires et qui pervertissent chacun une dimension de l'image, produisant alors ensemble une inversion. Si l'on projette les images sur un écran, comme c'est le cas avec le microscope solaire, le microscope à gaz et le mégascope, ce sont des images réelles qui remplacent les images virtuelles et qui, pour autant que les instruments que nous venons de citer sont analogues au microscope simple, se trouvent alors dans une position inversée par rapport aux objets eux-mêmes, à condition de les observer, après comme avant, du côté de l'oculaire, en utilisant pour ce faire des écrans transparents ; ces objets seront au contraire en position inversée-pervertie lorsqu'on les regardera sur des écrans

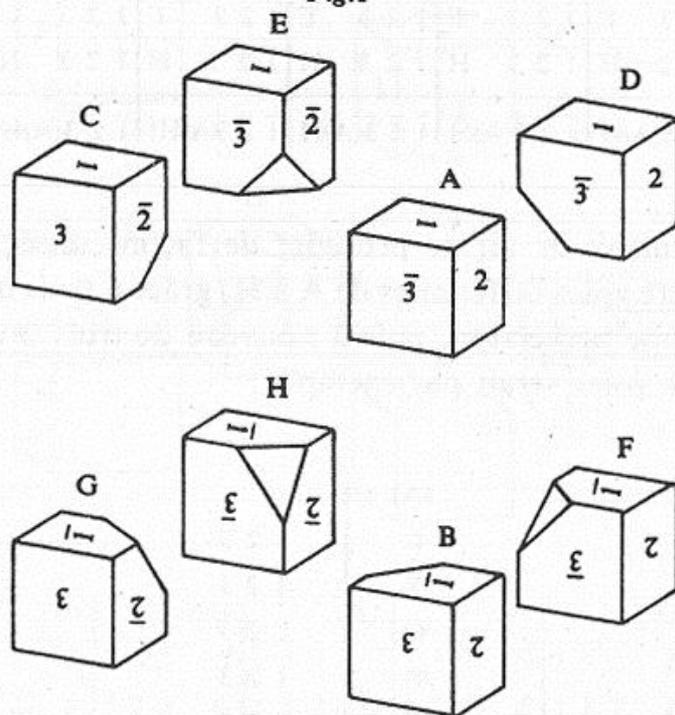
opaques, du côté de l'objectif. En ce qui concerne les projecteurs (composés le plus souvent de parties réfléchissantes) par l'intermédiaire desquels on peut projeter des images virtuelles sur une surface de papier regardée directement, afin de calquer les objets microscopiques, dans un tel cas la détermination de la position des images dépendra pour l'essentiel du nombre de réflexions dont on se sera servi. Chaque prisme rectangulaire, aussi bien que la plaque de verre d'Amici ou le miroir de Sömmering, effectue une perversion de l'image. La *camera lucida* de Wollaston engendre par double perversion dans la même dimension la position antérieure (inchangée) ; deux réflexions avec plans de réflexion croisés intervertissent l'image selon deux dimensions, c'est-à-dire l'inversent<sup>1</sup>.

Nous allons encore nous servir, comme exemple de positions consécutives, des positions des images en miroir engendrées par trois miroirs plans en position perpendiculaire les uns par rapport aux autres. Si I, II, III désignent les trois miroirs et A l'objet situé par rapport à eux de telle façon que celui-ci se trouve devant chacun des miroirs et soit pourvu des trois axes positionnels, de telle sorte que 1 « conspire » avec la perpendiculaire tirée du côté réfléchissant de I, et de même 2 et 3 avec les perpendiculaires tirées respectivement du côté réfléchissant de

1. On doit être attentif à ce fait lorsqu'on utilise un microscope pour examiner les parties d'un objet qui ont des déterminations topologiques, comme la torsion droite ou gauche dans les parois des vaisseaux spiralés d'une plante, le mouvement des cils des rotateurs, etc. Voici encore quelques exemples tirés des nombreux autres cas où ces concepts ont leur place. Un homme, sur la rive opposée d'une eau dormante, apparaît dans le miroir de l'eau en position pervertie, alors qu'à travers un télescope astronomique, il serait inversé ; quoique les deux images montrent la tête dirigée vers le bas et les pieds vers le haut, dans le cas du dioptrique, on verrait le cœur, si on pouvait l'examiner, à gauche comme dans l'original, et au contraire du côté droit dans le cas du catoptrique. On peut distinguer dans l'écriture une lettre inversée d'une lettre pervertie. Le V latin inversé donne un  $\Lambda$  grec ; le R latin donne quant à lui un  $\text{Я}$  cyrillique par perversion ; un L latin perverti et inversé donne un  $\Gamma$  grec. Les typographes lisent l'écriture pervertie sans difficulté ; en Angleterre, quelques lecteurs de journaux lisent aisément l'écriture inversée ; on trouve d'ailleurs ce type d'écriture par endroits dans certains ouvrages ; quant à l'écriture pervertie, on la trouve dans de nombreux manuscrits de Léonard de Vinci. Les chiffres inscrits sur l'échelle du magnétomètre de Gauss, doivent, afin de paraître à l'observateur en position naturelle, être à la fois pervertis et inversés, en raison de la perversion due au miroir et de l'inversion due au télescope.

perpendiculaires tirées respectivement du côté réfléchissant de II et de III, alors les positions dans lesquelles se trouvent les sept images en miroir et l'objet les uns par rapport aux autres, sont aisées à établir. Trois images B, C, D engendrées par réflexion simple en arrière de I, II, III, se trouvent, comme le montre la figure 1, dans les positions  $\bar{1} \bar{2} \bar{3}$ ,  $1 \bar{2} \bar{3}$  et  $1 \bar{2} \bar{3}$  par rapport à A.

Fig.1



En outre, trois images E, F, G, engendrées par réflexion double en arrière de II et III, de III et I et de I et II, sont dans les positions  $1 \bar{2} \bar{3}$ ,  $\bar{1} \bar{2} \bar{3}$ ,  $\bar{1} \bar{2} \bar{3}$  ; enfin, l'image H engendrée par réflexion triple, dans la position  $\bar{1} \bar{2} \bar{3}$ . Il est alors possible, en partant de A, de progresser de six façons différentes par perversions consécutives simples exclusivement, jusqu'à H, où la somme des sept positions négatives respectives doit nous donner la position primaire négative. C'est-à-dire :

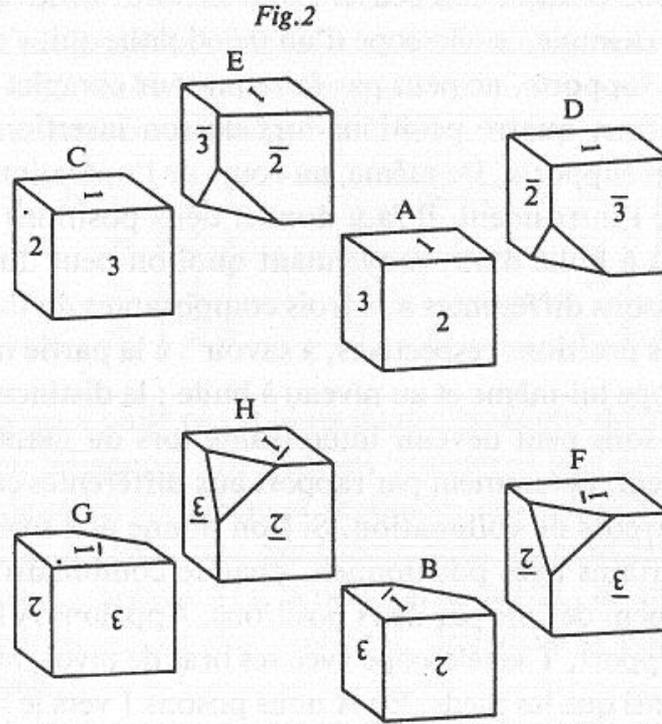
(A)	C	1 2 3	(A)	D	1 2 3	(A)	B	1 2 3	(A)	C	1 2 3	(A)	D	1 2 3	(A)	D	1 2 3
	E	1 2 3		F	1 2 3		G	1 2 3		G	1 2 3		E	1 2 3		F	1 2 3
	D	1 2 3		B	1 2 3		C	1 2 3		B	1 2 3		C	1 2 3		D	1 2 3
	F	1 2 3		G	1 2 3		E	1 2 3		F	1 2 3		G	1 2 3		E	1 2 3
	B	1 2 3		C	1 2 3		D	1 2 3		D	1 2 3		B	1 2 3		C	1 2 3
	G	1 2 3		E	1 2 3		F	1 2 3		E	1 2 3		F	1 2 3		G	1 2 3
	H	1 2 3		H	1 2 3		H	1 2 3		H	1 2 3		H	1 2 3		H	1 2 3
(A)H	1 2 3(A)H																

On pourrait de même procéder de façon consécutive par vingt-quatre voies différentes de A à H, grâce à trois inversions suivies d'une perversion, puis à nouveau de trois inversions ; une de ces voies serait par exemple :

(A)	
E	1 2 3
F	1 2 3
G	1 2 3
B	1 2 3
C	1 2 3
D	1 2 3
H	1 2 3
A(H)	1 2 3

La somme négative résulte chaque fois de six positions positives et d'une négative, etc.

Si l'on tourne l'objet A d'un huitième de tour autour du premier axe positionnel, alors toutes les images prennent de nouvelles positions (*fig.2*) et on obtient, à la place des six colonnes de positions consécutives du précédent tableau, les colonnes suivantes :



(A)	(A)	(A)	(A)	(A)	(A)	(A)					
C	1 3 2	D	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$	B	$\bar{1}$ 2 3	C	1 3 2	D	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$	B	$\bar{1}$ 2 3
E	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$	F	$\bar{1}$ 2 3	G	1 3 2	G	$\bar{1}$ 2 3	E	1 3 2	F	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$
D	1 3 2	B	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$	C	$\bar{1}$ 2 3	B	1 3 2	C	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$	D	$\bar{1}$ 2 3
F	$\bar{1}$ 2 3	G	1 3 2	E	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$	F	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$	G	$\bar{1}$ 2 3	E	1 3 2
B	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$	C	$\bar{1}$ 2 3	D	1 3 2	D	$\bar{1}$ 2 3	B	1 3 2	C	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$
G	1 3 2	E	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$	F	$\bar{1}$ 2 3	E	1 3 2	F	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$	G	1 2 3
H	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$	H	$\bar{1}$ 2 3	H	1 3 2	H	$\bar{1}$ 2 3	H	1 3 2	H	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$
(A)H	$\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$										

Dans ce cas, la septième image en miroir,  $H$ , se trouve encore, par rapport à l'objet  $A$ , dans la position primaire négative qui se révèle être la forme de chacune des six colonnes. Du reste, pour des raisons optico-géométriques, l'image  $H$  doit toujours se trouver dans cette position par rapport à l'objet, quelle que puisse être la direction des axes positionnels de l'objet par rapport aux plans des miroirs.

Dans le maniement de certains instruments mathématiques, les symboles positionnels peuvent souvent être utilisés avec avantage. Par exemple, le télescope d'un théodolithe qui, s'il est placé entre des supports, ne peut pas faire un tour complet verticalement, permet quatre positions lors de son insertion dans les paliers des supports. De même, au cours de l'opération de nivellement de l'instrument, il faut donner deux positions opposées au niveau à bulle d'air, moyennant quoi on peut donner huit combinaisons différentes aux trois composantes du théodolithe dans leurs positions respectives, à savoir : à la partie inférieure, au télescope lui-même et au niveau à bulle ; la distinction de ces combinaisons peut devenir intéressante lors du maniement de l'instrument, notamment par rapport aux différentes corrections ou aux erreurs de collimation. Si l'on donne aux trois composantes certains axes positionnels, chaque combinaison pourra être aisément définie par deux positions. Appelons A l'alidade\* avec le support, T le télescope avec ses bras de pivot, N le niveau à bulle ainsi que les pieds. En A nous posons 1 vers le haut selon l'axe vertical, 3 et  $\bar{3}$  sur les deux supports, 2 de telle façon que 1, 2, 3 soient en position d'axe droit. En T, nous posons 2 sur l'objectif, donc  $\bar{2}$  sur l'oculaire, 3 et  $\bar{3}$  aux deux pivots et 1 de telle façon que 1, 2, 3 soient là encore en position d'axe droit. En N nous posons 1 à la partie supérieure du tube de verre, 3 et  $\bar{3}$  aux deux pieds et 2 de telle façon que 1, 2, 3 donnent à nouveau une position d'axe droit. Les huit combinaisons sont alors les suivantes :

- |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) pos (A)T = 1 2 3                 | 5) pos (A)T = 1 2 3                 |
| (A)N = 1 2 3                        | (A)N = 1 $\bar{2}$ $\bar{3}$        |
| 2) pos (A)T = $\bar{1}$ $\bar{2}$ 3 | 6) pos (A)T = $\bar{1}$ $\bar{2}$ 3 |
| (A)N = 1 2 3                        | (A)N = 1 $\bar{2}$ $\bar{3}$        |
| 3) pos (A)T = $\bar{1}$ 2 $\bar{3}$ | 7) pos (A)T = $\bar{1}$ 2 $\bar{3}$ |
| (A)N = 1 2 3                        | (A)N = 1 $\bar{2}$ $\bar{3}$        |
| 4) pos (A)T = 1 $\bar{2}$ $\bar{3}$ | 8) pos (A)T = 1 $\bar{2}$ $\bar{3}$ |
| (A)N = 1 2 3                        | (A)N = 1 $\bar{2}$ $\bar{3}$        |

\* L'alidade est l'appareil qui sert à mesurer les angles. (N.d.T.)

En inversant la première position (A)T dans chacun des huit cas (ce qui laisse d'ailleurs leur forme inchangée dans la mesure où elle est toujours réciproque) et en l'additionnant à la seconde position (A)N, il en résulte chaque fois la position du niveau à bulle par rapport au télescope ; soit :

- |                                    |                                     |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) pos (T)N = 1 2 3                | 5) pos (T)N = 1 $\bar{2}$ $\bar{3}$ |
| 2) = $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$ | 6) = $\bar{1}$ 2 $\bar{3}$          |
| 3) = $\bar{1}$ 2 $\bar{3}$         | 7) = 1 $\bar{2}$ $\bar{3}$          |
| 4) = 1 $\bar{2}$ $\bar{3}$         | 8) = 1 2 3                          |

Le niveau à bulle reçoit alors quatre positions différentes par rapport au télescope, une dans les premier et huitième cas, une seconde dans les deuxième et septième, une troisième dans les troisième et sixième, une quatrième dans les quatrième et cinquième cas. La première est la position naturelle ; les trois autres, des inversions autour des troisième, deuxième et premier axes positionnels.

Dans d'autres cas, il conviendrait d'y ajouter, en tant que nouvel élément, l'espace infini avec des axes positionnels convenablement choisis, comme par exemple pour l'héliotrope, l'inclinaison magnétique, etc. Nous laissons le lecteur loisible de tout approfondissement.

### *De l'hélicoïde*

L'hélicoïde est une ligne à deux axes de courbure, qui peut être considérée comme le trajet d'un point se déplaçant dans l'espace simultanément de façon cyclique et progressive.

Afin de donner à ce concept une généralité qui convienne aux considérations topologiques, nous nous servirons des constatations suivantes : nous entendons par le terme de ligne cyclique ou *boucle* (dans notre perspective actuelle), la circonférence de toute figure plane quelconque, à condition que son périmètre ne se croise nulle part lui-même et ne possède pas non plus de points multiples. Un point quelconque à l'intérieur de la surface ainsi encerclée sert de centre à la boucle et l'on peut,

afin de mieux s'en faire une idée, choisir pour cela le centre de gravité de la surface : nous désignerons ce point par 0. Les extrémités d'un diamètre (passant par 0) seront désignées par 1 et  $\bar{1}$ , les extrémités d'un second diamètre (quelconque ou si l'on préfère, perpendiculaire au premier) par 2 et  $\bar{2}$ . Les deux faces du plan circulaire peuvent être distinguées comme l'endroit et l'envers. Nous tirerons alors sur le plan circulaire au point 0 une perpendiculaire et désignerons un point situé à l'endroit de celle-ci par 3 et un autre à son envers par  $\bar{3}$ . Cette boucle se trouve donc désignée de façon analogue à la distinction positionnelle des dimensions étudiée plus haut, et les points 0, 1, 2, 3 peuvent, comme dans le cas précédent, se trouver en position d'axe droit ou gauche. On peut donner à la boucle un mouvement translatore en faisant progresser son centre 0 selon un chemin quelconque, droit ou courbe, que nous nommerons sa *conductrice* ou plus simplement son *trajet*. Nous ne nous autoriserons seulement pour l'instant que des changements de direction continue sur le parcours de la conductrice et excluerons ainsi angles et pointes, cette limitation ne valant cependant pas pour la boucle. Prenons deux points C et D sur la conductrice, entre lesquels nous allons considérer le mouvement de la boucle ; nous désignerons sur la tangente du trajet, tirée à partir de l'endroit où est situé dans chaque cas le point 0, le côté vers lequel on se rapproche en suivant le trajet, du point D, par le chiffre 4 ; le côté opposé sera désigné quant à lui par  $\bar{4}$ . Nous appellerons *progrédient* le mouvement dans la direction 4 (ou CD) et *rétrograde* le mouvement inverse. Au début du mouvement translatore de la boucle, son endroit sera dirigé vers 4 et son envers par conséquent vers  $\bar{4}$ . Nous concèderons à la ligne cyclique, lors de son déplacement, une modification quelconque mais néanmoins continue de sa grandeur et de sa configuration ; quant au plan circulaire, il pourra subir lui aussi une modification quelconque de sa situation, mais à condition que d'une part l'angle entre 1 et 4 ne soit jamais supérieur à  $90^\circ$  (c'est-à-dire que 04 ne tombe jamais dans le plan circulaire) et que d'autre part, lors des changements de situation successifs de la perpendiculaire à la boucle et lors des déplacements du centre de la boucle, l'ensemble des parties de celle-ci accomplisse toujours un

mouvement (même s'il est de grandeur inégale) dans la direction 03. Il est évident qu'étant donné les limitations que nous avons apportées à la différence entre les directions 3 et 4, le mouvement progressif de la boucle pourrait être aussi bien désigné par  $\bar{3}$  que par  $\bar{4}$ , de même que le mouvement rétrograde, par  $\bar{3}$  comme par  $\bar{4}$ . La surface engendrée par la ligne circulaire lorsqu'elle opère un tel mouvement et encercle la conductrice à la façon d'un tuyau, est appelé *ascoïde*.

Si, au cours du mouvement progressif de la boucle, mouvement nécessaire à l'engendrement de l'ascoïde, un point se déplace sur la ligne circulaire elle-même, de façon continue dans une direction donnée, le point décrit alors un *hélicoïde* sur l'ascoïde, tout au long de la conductrice. La vitesse des deux mouvements simultanés, cyclique et progressif, ne subit aucune autre limitation que celle de ne pouvoir se changer en son contraire ; elle peut donc varier à volonté. Pour désigner le sens du mouvement cyclique du point, nous nous servons des quatre signes positionnels situés sur la circonférence de la boucle : 1, 2,  $\bar{1}$ ,  $\bar{2}$ , de telle façon que le mouvement dans le sens 1 2  $\bar{1}$   $\bar{2}$  1 puisse être exprimé indifféremment par 1 2 ou 2  $\bar{1}$  ou  $\bar{1}$   $\bar{2}$  ou  $\bar{2}$  1, tandis que le mouvement inverse pourra l'être par 1  $\bar{2}$  ou  $\bar{2}$   $\bar{1}$  ou  $\bar{1}$  2 ou 2 1.

Dès lors, le trajet du point qui décrit l'hélicoïde et par conséquent l'hélicoïde lui-même, est caractérisé topologiquement de la manière la plus simple par la combinaison des dénominations choisies pour les deux mouvements ; ainsi, à titre d'exemple, nous désignerons par (1 2)3 l'hélicoïde décrit par un point se déplaçant cycliquement dans le sens 1 2 progressivement dans le sens 3.

On peut aisément concevoir que des variétés de configuration de la conductrice ou de la ligne cyclique, mais aussi bien des changements de forme et de situation de celles-ci, ainsi d'ailleurs que des variations dans la vitesse et des changements de la vitesse du mouvement cyclique ou encore du mouvement translatore du point engendrant l'hélicoïde, n'entraînent dans l'hélicoïde, et ce, quel que soit le nombre de ces variations, que des différences au niveau de la suite de chiffres du type mentionné ci-dessus, et peuvent donc être considérés pour l'instant comme essentiellement géométriques. De même l'inversion

du sens des deux mouvements par laquelle le point placé sur le trajet hélicoïdal devient rétrograde, n'entraîne qu'une différence phoronomique\* qui fait que nous pouvons considérer par exemple comme topologiquement équivalents les trajets engendrés par  $(1\ 2)3$  et par  $(1\ \bar{2})\bar{3}$ . Seule l'inversion du sens d'un seul des deux mouvements associés ou, ce qui revient au même, l'échange entre position d'axe droit et d'axe gauche lors de la détermination des points 1 et 2 sur la circonférence de la boucle avec maintien des mêmes symboles, est susceptible d'engendrer une modification essentiellement topologique de l'hélicoïde.

Une fois admises ces considérations, on constate aisément que les suites de chiffres qui servent à désigner l'hélicoïde — abstraction faite des parenthèses — doivent correspondre à celles des formes positionnelles dans lesquelles l'axe de position qui répond à la perpendiculaire de la boucle apparaît à la troisième place, c'est-à-dire correspondent aux seize formes des première et cinquième colonnes du tableau exposé plus haut. Si l'on avait transposé les axes 2 et 3 dans le plan circulaire et l'axe 1 sur la perpendiculaire, on aurait obtenu les formes positionnelles des deuxième et quatrième colonnes ; de même, si 1 et 3 avaient été placés dans la boucle et 2 sur sa perpendiculaire, les formes des troisième et sixième colonnes du tableau nous auraient donné les suites de chiffre correspondant aux différents hélicoïdes. On peut donc utiliser l'ensemble des quarante-huit formes positionnelles (en séparant par des parenthèses les deux premiers membres du troisième) comme formules des hélicoïdes. La dénomination introduite ci-dessus sera désormais limitée de préférence aux cas où l'on a choisi pour la boucle une position d'axe droit. Dans les cas contraires, où 0, 1, 2, 3 se trouvent en position d'axe gauche, on écrira par exemple  $[1\ 2]3$ . Il en résulte donc quatre-vingt-seize formes hélicoïdales différentes. Nous nous contenterons de présenter sur le tableau qui

\* Phoronomique : synonyme de mécanique. Le terme *phoronomie* avait été proposé au début du XIX<sup>e</sup> siècle pour définir la science des lois de l'équilibre et du mouvement des corps. (N.d.T.)

suit, la moitié dont les combinaisons sont toutes fondées sur une position d'axe droit :

(1 2) 3	(1 $\bar{2}$ ) $\bar{3}$	(2 3) 1	(2 $\bar{3}$ ) $\bar{1}$	(3 1) 2	(3 $\bar{1}$ ) $\bar{2}$
( $\bar{1}$ $\bar{2}$ ) 3	( $\bar{1}$ 2) $\bar{3}$	( $\bar{2}$ $\bar{3}$ ) 1	( $\bar{2}$ 3) $\bar{1}$	( $\bar{3}$ $\bar{1}$ ) 2	( $\bar{3}$ 1) $\bar{2}$
(2 $\bar{1}$ ) 3	(2 1) $\bar{3}$	(3 $\bar{2}$ ) 1	(3 2) $\bar{1}$	(1 $\bar{3}$ ) 2	(1 3) $\bar{2}$
( $\bar{2}$ 1) 3	( $\bar{2}$ $\bar{1}$ ) $\bar{3}$	( $\bar{3}$ 2) 1	( $\bar{3}$ $\bar{2}$ ) $\bar{1}$	( $\bar{1}$ 3) 2	( $\bar{1}$ $\bar{3}$ ) $\bar{2}$
( $\bar{1}$ $\bar{2}$ ) $\bar{3}$	( $\bar{1}$ 2) 3	( $\bar{2}$ $\bar{3}$ ) $\bar{1}$	( $\bar{2}$ 3) 1	( $\bar{3}$ $\bar{1}$ ) $\bar{2}$	( $\bar{3}$ 1) 2
(1 2) $\bar{3}$	(1 $\bar{2}$ ) 3	(2 3) $\bar{1}$	(2 $\bar{3}$ ) 1	(3 1) $\bar{2}$	(3 $\bar{1}$ ) 2
( $\bar{2}$ 1) $\bar{3}$	( $\bar{2}$ $\bar{1}$ ) 3	( $\bar{3}$ 2) $\bar{1}$	( $\bar{3}$ $\bar{2}$ ) 1	( $\bar{1}$ 3) $\bar{2}$	( $\bar{1}$ $\bar{3}$ ) 2
(2 $\bar{1}$ ) $\bar{3}$	(2 1) 3	(3 $\bar{2}$ ) $\bar{1}$	(3 2) 1	(1 $\bar{3}$ ) $\bar{2}$	(1 3) 2

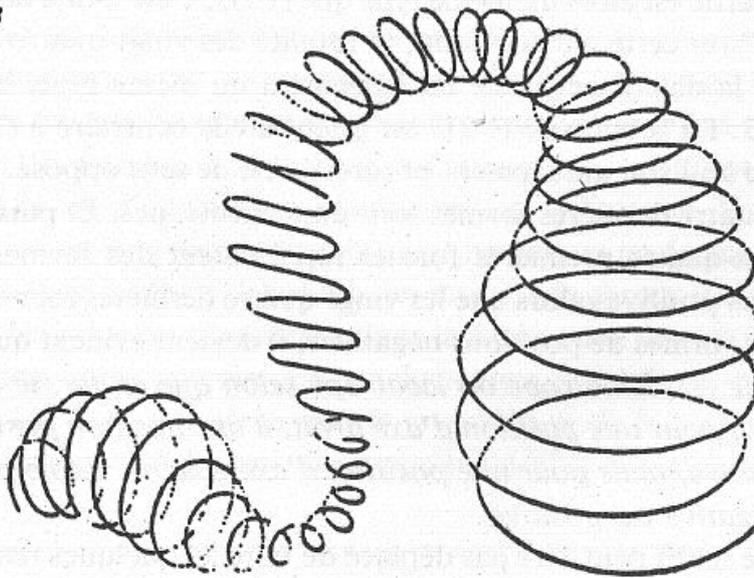
Les quarante-huit autres combinaisons ne se distinguent de celles-ci que par le remplacement des parenthèses par des crochets.

L'ensemble des hélicoïdes correspondant à ces formes se décompose donc, du point de vue topologique que nous venons de souligner, à savoir d'après leur *type de torsion*, en deux espèces dont

(12)3 et [12]3

peuvent être considérés comme les représentants. Les hélicoïdes correspondant à la première de ces deux formes sont nommés *destrogyres* ou *dextrotropes* ; celles qui correspondent à la seconde *lévogyres* ou *laeotropes*.

Fig.3



La *figure 3* représente un hélicoïde dexiotrope.

Puisque le type de torsion d'un hélicoïde n'est pas modifié par l'inversion du sens de l'ensemble des deux mouvements associés, mais seulement par une inversion de l'un des deux ou par commutation de la position d'axe avec celle qui lui est hétérologue, on distingue ainsi aisément si la forme d'un hélicoïde donné correspond à une torsion dexiotrope ou s'il s'agit d'une torsion laeotrope.

Chaque ligne horizontale du tableau précédent comporte trois paires de formes. Dans chaque paire, la seconde forme est toujours rétrograde par rapport à la première, en tant que les deuxième et troisième membres portent le signe opposé. Le type de torsion est identique pour chaque paire. Les trois formes (12)3, (23)1 et (31)2 sont également du même type puisque la modification implicite des axes positionnels, dont la position reste néanmoins homologue, peut être donnée par les positions positives 2 3 1 et 3 1 2 ; cette conclusion peut être appliquée à toutes les autres lignes du tableau. Le type de torsion est ainsi identique pour l'ensemble des six formes de chaque ligne. Les formes des deuxième, troisième et quatrième lignes ne se distinguent des formes correspondantes de la première que par un mode de désignation différent pour un sens identique du mouvement cyclique. La totalité des vingt-quatre formes de la première partie est alors du même type que (1 2)3, c'est-à-dire dexiotrope. Pour cette même raison, la totalité des vingt-quatre formes de la deuxième partie est également du même type, celui de (12)3. La torsion de  $(\bar{1} \bar{2})3$  est quant à elle contraire à (12)3 puisque seul son mouvement progressif est de sens opposé. Les vingt-quatre dernières formes sont donc laeotropes. Et puisque les vingt-quatre premières formes représentent des formes de positions positives alors que les vingt-quatre dernières représentent des formes de positions négatives, il devient évident qu'*un hélicoïde est dexiotrope ou laeotrope selon que sa forme correspond, pour une position d'axe droit, à une position positive ou négative, mais pour une position d'axe gauche, à une position négative ou positive.*

Il ne serait peut-être pas déplacé de faire ici quelques remarques sur la façon dont on utilise couramment les dénominations

de ces deux types. En effet, c'est pure convention que d'appeler un des hélicoïdes ou pas-de-vis : droit, et l'autre : gauche. Pour ma part, j'ai choisi les noms de telle sorte qu'ils se rattachent le plus naturellement aux constatations topologiques précédentes, mais j'ai dû renoncer à la dénomination « tordu vers la droite ou vers la gauche, *dextrorsum* ou *sinistrorsum volubilis* et *contortus* » utilisée ailleurs, dans la mesure où aucune d'elle n'a hélas atteint à la signification universellement fixée qu'il conviendrait qu'elles aient, tant dans la terminologie botanique et zoologique que dans le langage technique. Les vis utilisées en mécanique se trouvent être dans leur immense majorité, pourvues d'une torsion laeotrope ; or, le langage technique les désigne comme des vis « droites », non seulement parce que ce sont les plus ordinaires, mais encore parce qu'elles sont en général conçues pour effectuer un mouvement vers le bas par une torsion à droite. Les vis dites « gauches », dont on se sert beaucoup plus rarement dans des cas particuliers (et dont les plus remarquables sont mentionnées dans *l'Encyclopédie technologique* de Precht<sup>1</sup>), ont quant à elles une torsion dexiotrope. Il semblerait que le rapport entre fréquence et type de torsion soit inversé pour les vis japonaises. C'est à partir de ces faits que les dénominations de « droite » et de « gauche » ont été transposées à l'ensemble de ce qui a trait, dans le domaine technique, aux torsions en forme de vis, même quand la forme gauche (c'est-à-dire dexiotrope) est sans conteste la plus fréquente comme dans le cas des engrenages de montres, ou quand les deux types ont une fréquence semblable comme c'est le cas pour les ailes des moulins à vent, l'hélice des bateaux, la pompe en spirale, la vis d'Archimède, les escaliers en colimaçon, les colonnes torses et autres ornements architecturaux en forme de vis, mais aussi le ressort à boudin, les ressorts de chronomètres ainsi que les lisses ou fils entrant dans la fabrication des cordes, des cordons et des guimpes. En conchyliologie, la distinction en question est de tout premier intérêt pour l'étude de la morphologie des escargots. Là aussi, on a nommé droites les torsions laeo-

1. Tome XIII, page 316.

tropes qui sont la règle, et gauches, les torsions inverses ou dexiotropes, qui sont les plus rares ; cette dénomination peut, qui plus est, être considérée comme naturelle dans la mesure où l'on s'attache à suivre le sens du développement de l'animal : ainsi pour les torsions droites, en partant de l'apex de la coquille, celui-ci dirigé vers le haut, on descend en se laissant guider autour de l'axe, par un mouvement de torsion vers la droite. Dans d'autres cas zooliques, les deux types de torsions se trouvent le plus souvent conjugués au niveau des organes situés symétriquement par rapport à la médiane, de chaque côté du corps de l'animal. On en a des exemples avec le limaçon de l'oreille interne dans les classes animales supérieures, les cornes et les dents torses, etc. ; on peut également placer ici la défense torsadée et normalement unique du narval, dont le pendant s'atrophie ou ne se développe pas. Selon l'espèce de l'organe considéré, la torsion dexiotrope se trouve du côté droit ou du côté gauche de l'animal. Enfin, en botanique, les deux types de torsions peuvent être distingués non seulement sur la tige des plantes grimpan-tes, sur les vrilles et les vaisseaux spiralés, mais également dans les torsions des différentes parties des plantes, tel le tronc des arbres, les barbes, le pistil et surtout les corolles contournées des fleurs. Sur ce point, la nomenclature linnéenne coïncide avec la terminologie technologique ou conchyliologique que nous venons d'évoquer, encore qu'on puisse la considérer pour ainsi dire comme contre-nature ; car l'expression *caulis volubilis* est ainsi expliquée par Linné<sup>1</sup> : *spiraliter ascendens per ramum alienum*, à savoir *sinistrorsum* (☺) *secundum solem vulgo*, e.g. *Humulus*, *Lonicera* cet. ; *dextrorsum* (☻) *contra motum solis vulgi*, e.g. *Convolvulus*, *Phaseolus*, cet. Pour l'*intorsio*<sup>2</sup>, il reprend cette définition et la classe avec les types de torsion du cirrus, de la corolle et d'autres organes. Dans une note sur ce sujet, Linné donne alors sa définition de *sinistrorsum* et *dextrorsum* qui a connu ultérieurement — en partie à cause de la faute d'impression commise à cette occasion — les exégèses les plus diverses. Linné établit que : *sinistrorsum hoc est quod respicit dextram, si ponas Te ipsum, in centro constitutum, meri-*

1. *Philosophia botanica*, 1751, page 39.

2. *Ibid*, page 103.

*diem adspicere ; dextrorsum itaque contrarium*, et explique ainsi son souci que les pétales dirigés vers le côté *droit* d'un observateur placé au centre, soient considérés comme le signe distinctif d'une corolle tordue à *gauche* et vice versa. Le *meridiem adspicere* n'est nullement dans le langage concret de Linné un terme superflu, mais rend compte bien plutôt de la position de l'observateur imaginé debout au cœur de la fleur, le visage tourné vers un point déterminé de l'horizon, la tête étant bien entendu dirigée vers le haut. Certes il reste, en ce qui concerne les définitions, nombre de points à préciser et autant à interroger d'un point de vue topologique. Ainsi pour *secundum solem*, on ne doit pas seulement tenir *crescens* ou *scandens* pour tacitement acquis, mais également *sub latitudine boreali* ; pour ce qui concerne les fleurs spiralées, la question reste ouverte de savoir si l'on entend par *hoc est, quod respicit dextram s. sinistram*, le bord intérieur ou extérieur des pétales, dont le côté dit intérieur (c'est-à-dire primitivement dirigé vers l'axe de la fleur) peut être orienté tantôt vers l'intérieur, tantôt vers le haut, tantôt vers l'extérieur selon le déploiement de la corolle, ou si l'on entend par là la face intérieure ou extérieure du pétale. Cependant, même les exemples de Linné ne nous fournissent pas d'indice certain pour trancher la question, comme il ressort du regroupement (mis en cause par Alexander Braun<sup>1</sup>) qu'il opère de *Vinca* et de *Rauwolfia* avec *Asclenias*, *Periploca* et *Nerium*. Il semble néanmoins résulter de ce que nous venons de mentionner que Linné avait l'intention de donner le qualificatif de droites aux parties spiralées d'une plante, de la même façon qu'on qualifiait ailleurs de droits un tire-bouchon ou la coquille d'un escargot par exemple. Des auteurs botanistes ultérieurs ont longtemps suivi le conseil de Linné, qu'ils ont répété dans diverses définitions (en partie très imprécises). Reinhold Forster par exemple explique que : *truncus, volubilis, spiraliter ascendens per alia corpora, dextrorsum (D) a dextra ad sinistram, contra motum solis vulgo, sinistrorsum (C) a sinistra ad dextram, secundum solem vulgo*<sup>2</sup>.

1. « Über die Ordnung der Schuppen an den Tannenzapfen » (À propos de l'ordre des écailles sur les pommes de pin), *Acten dev Leop. Carol Acad. d. Naturf.*, tome 15, première partie, p.15.

2. *Echiridion botanicae inserviens*, Lugd. Bat. ed. altera, 1792, p. 3.

Link : *caulis volubilis heliis in modum circa alia corpora firma volvitur et quidem destrorsum seu contra solis motum, uti nautae aiunt e.g. Convolvulus cet., aut sinistrorsum seu secundum solis motum e.g. Humulus cet*<sup>1</sup>. On y ajoutera sans peine *constituere se ipsum in centro*. Willdenow nous explique<sup>2</sup> que la tige se tord « de la façon droite (*dextrorsum*) lorsqu'elle tourne en descendant de droite à gauche autour d'un objet comme par exemple *Convolvulus*, de façon gauche (*sinistrorsum*) lorsqu'elle tourne en descendant de gauche à droite autour d'un objet comme par exemple *Humulus Lupulus* ». Cette définition, aussi maladroite que vague dans sa forme, est, comme on ne peut que le constater d'après ces exemples, linnéenne dans son contenu et nécessite implicitement que l'observateur, situé à l'extérieur de l'hélicoïde, parcoure imaginativement de haut en bas les parties des tours de spires qui se trouvent dirigées vers lui. Dans d'autres écrits<sup>3</sup>, les désignations de *dextrorsum* et *sinistrorsum* sont utilisées au sens de Linné, alors que les signes ☉ et ☽ le sont en sens inverse. C'est toutefois Decandolle qui le premier a proposé l'échange des désignations elles-mêmes, proposition qui a été entérinée par la plupart des auteurs botanistes contemporains. L'avantage d'une définition plus naturelle, qui conserve la désignation antérieure mais en échangeant les significations, est cependant atténué par l'inconvénient que constitue la confusion qui en résulte. Decandolle définit par *dextrorsus*<sup>4</sup> : qui se dirige à droite, et de là *dextrorsum volubilis* : qui s'enroule de gauche à droite ; dans ce sens, on se suppose au centre de la spire, tourné du côté du midi\*, cette dernière définition n'étant à l'évidence qu'une traduction aveugle de *meridiem adspicere*. Decandolle s'exprime de la même façon

1. *Elementa philosophiae botanicae*, Berol, 1824, p. 145.

2. *Grundriss der Kräuterkunde*, 7<sup>e</sup> ed., Link ed., Berlin, 1831, p. 41.

3. Par exemple in *Zimmermann's Grundzügen der Phytologie*, Vienne, 1831, p. 198.

4. *Théorie élémentaire de la botanique*, Paris, 1813, 2<sup>e</sup> ed. 1819, p. 479.

\* Ces deux définitions sont en français dans le texte.

sur ce sujet à d'autres endroits de ses écrits<sup>1</sup>. Les dénominations de « tourné à droite et à gauche » vont également à l'encontre de la définition linnéenne et sont donc concordantes avec celle de Decandolle, chez des auteurs comme Mohl<sup>2</sup>, Schleiden<sup>3</sup>, Endlicher et Unger<sup>4</sup>, ainsi que chez Alex. Braun<sup>5</sup> et Naumann<sup>6</sup> entre autres, dans leurs recherches sur la position des feuilles.

1. *Organographie végétale*, Paris 1827, p. 156, et *Physiologie végétale*, Paris 1832, p. 840.

2. *Ueber den Bau und das Winden der Ranken und Schlingpflanzen* (Sur l'organisation et la torsion des sarments et des plantes grimpantes), Tübingen, 1827.

3. *Grundzüge der wissenschaftlichen Botanik*, Leipzig, 1842. En 1<sup>ère</sup> partie, p. 140, on trouve : « Je veux discuter ici encore brièvement les dénominations de tiges tournées à droite et à gauche, pour lesquelles la confusion règne largement. La manière naturelle de regarder est la suivante : la plante se développe de bas en haut, donc elle monte ; si nous appliquons maintenant les expressions gauche et droite à la plante, ceci n'a de sens que si nous nous mettons pour ainsi dire à sa place ; mais nous ne montons alors en nous tournant à gauche que si nous avons l'axe de torsion à notre gauche, et en nous tournant à droite que si nous l'avons à notre droite. Si nous nous référons maintenant à la course du soleil, nous ne pouvons évidemment dans notre hémisphère nord mettre en rapport avec cette course que la partie de la torsion orientée vers le soleil, soit la moitié sud de la torsion ; mais dans ce cas la spirale tournée à droite va avec le soleil ; celle tournée à gauche, contre le soleil. Linné a curieusement lié les dénominations d'une façon inverse, en partant bien sûr d'une manière de regarder qui manquait de perspicacité, et certains l'ont suivi alors que d'autres ont complètement inversé la chose et appelé gauche ce qui jusque là était appelé droit et droit ce qui était gauche, jusqu'à ce que la chose soit devenue totalement confuse. En effet, la référence à la course du soleil reste une désignation toujours très imparfaite. Tourné à gauche ou à droite ne peut pas, me semble-t-il, être saisi autrement que comme je l'ai indiqué. »

4. *Grundzüge der Botanik*, entworfen von Stephan Endlicher und Franz Unger, Vienne 1843 ; où l'on trouve à la page 83 : « La tige torse (*caulis volubilis*) s'enlace en une ligne de vis (spirale) autour d'un support. Elle est spiralée à droite (*dextrorsum volubilis*) lorsque la torsion autour de l'observateur, qui doit se penser lui-même comme support, est orientée de gauche à droite vers le haut (*Humulus lupulus*, *Polygonum*, *Convolvulus*). La tige spiralée à gauche (*caulis sinistrorsum volubilis*) s'enroule autour de l'observateur de droite à gauche (*Phaseolus vulgaris*, *Convolvulus sepium*). Linné qualifie la tige qui se tord vers le bas de droite à gauche, de tournée à droite, et celle qui se tord vers le bas de gauche à droite, de tournée à gauche. Cependant, puisque la torsion s'opère en fait dans la nature du bas vers le haut, nous appellerons tourné à droite ce que Linné appelle tourné à gauche, et tourné à gauche ce qu'il appelle tourné à droite.

5. *Op. cit.*

6. C.F. Naumann, « Sur la quinonce, comme loi fondamentale de la position des feuilles dans le règne végétal », *Pogg. Ann.*, LVI, 7, dans lequel l'auteur se sert, du reste, de l'expression *dextrorsum et sinistrorsum scandens*, qui se rapproche plus d'une définition.

A l'égard du recouvrement des pétales d'une fleur, que nous avons évoqué plus haut, et notamment lors de l'éclosion de celle-ci, il s'avère cependant moins aisé qu'il n'y paraît d'après les définitions qui nous sont fournies sur ce sujet dans les travaux botaniques, d'en donner une définition topologique précise ; quel que puisse être le mérite des arguments d'un Braun, selon qui, afin de respecter une certaine cohérence, la gentiane, au moment de son éclosion, devrait d'après Linné être appelée *sinistrorsum* plutôt que *dextrorsum* et d'après Decandolle, *dextrorsum* au lieu de *sinistrorsum contorta*, il n'épuise cependant pas les divergences rencontrées à propos de cet exemple, dont une discussion plus détaillée nous entraînerait à l'évidence trop loin, et devra donc être réservée pour une autre occasion.

Mentionnons encore ici le fait que les lettres  $\delta$  et  $\lambda$  offrent un excellent moyen mnémotechnique pour distinguer les deux types de torsion si on les compare avec la forme apparente des parties d'un hélicoïde (traversé par sa conductrice) visibles par un observateur, ainsi que la *figure 4* le montre clairement.

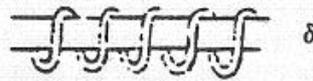


Fig.4



Le signe  $f$  permet lui aussi de rendre compte des torsions de vis *dexiotropes* —  $ffffff$ .

Le trajet loxodromique\* d'un bateau qui se dirige exactement vers l'Ouest ou vers l'Est est un parallèle, mais dans tous les autres cas, il s'agit d'un hélicoïde qui s'avèrera dexiotrope si le pilote dirige sa route vers le Nord-Ouest ou le Sud-Est, et laetotrope s'il la dirige vers le Sud-Ouest ou le Nord-Est. Le sphéroïde terrestre à la surface duquel s'engendre l'hélicoïde, est

\* Trajet d'un bateau suivant la ligne qui coupe les méridiens terrestres sous un angle constant. (*N.d.t.*)

à considérer dans ce cas comme un ascoïde en tout point fermé, ayant l'axe de la terre pour conductrice.

Si, lors de l'engendrement de l'hélicoïde mentionné ci-dessus, on laisse deux ou plusieurs points au lieu d'un seul se déplacer cycliquement dans une même direction sur la circonférence, on obtient alors des hélicoïdes *doubles* ou *multiples*. Si l'on pose préalablement et dans une visée immédiate que, malgré l'arbitraire de leurs mouvements relatives, aucun des points considérés ne dépasse ou ne croise celui qui le précède, alors les différents hélicoïdes simples dont se compose un hélicoïde multiple et dont les torsions juxtaposées seront qualifiées de *paradromes*, ne présentent entre eux ni points de contact ni points d'intersection dans l'espace. Les arêtes d'une vis à double pas, de même que les bandes torses colorées qu'on voit sur de nombreuses coquilles univalves, offrent de bons exemples d'hélicoïdes multiples. Il est à peine besoin de mentionner qu'un hélicoïde multiple possède le même type de torsion que chacun de ses composants, lesquels doivent être entre eux dans une relation de similitude, c'est-à-dire isotropes.

Pour ce qui concerne les autres complexions linéaires dans l'espace, que nous aurons à étudier de plus près lors de travaux ultérieurs, nous devons prendre aussi en considération le cas où deux ou plusieurs points tournent cycliquement lors de leur mouvement progressif imposé par la conductrice, avec des vitesses dont la différence obéit à un ordre topologique, et où les hélicoïdes engendrés produisent un système de points d'intersection arithmologiquement ordonnés. Dans un tel cas, rien n'empêche que des hélicoïdes isotropes et hétérotropes puissent être liés entre eux. Un exemple de tels hélicoïdes, que nous qualifions de *diadromes*, nous est fourni par les rangées ou les spires selon lesquelles s'ordonnent les écailles des pommes de pin. Deux hélicoïdes isotropes engendrés sur un ascoïde commun peuvent être soit paradromes soit diadromes ; deux hélicoïdes hétérotropes sont toujours diadromes.

Avant d'aborder de nouveaux cas de combinaison entre différents hélicoïdes, il convient de s'arrêter sur le concept de surface hélicoïdale. Si nous relions le point H qui décrit l'hélicoïde et le point O sur la conductrice par une ligne droite (infinie),

nous engendrons alors simultanément à l'hélicoïde, une *surface hélicoïdale* appartenant à la même conductrice. Son intersection avec l'ascoïde est un double hélicoïde. Si la conductrice est une ligne droite et la boucle, un cercle de rayon constant dont le centre progresse sur la conductrice et dont le plan est perpendiculaire, nous engendrons alors une surface de vis comme nous pouvons en rencontrer sur les vis à pas plan, sur la vis d'Archimède et sur la face inférieure des escaliers de pierre en colimaçon, ou ainsi qu'il résulte de la torsion d'une bande plane (lame métallique) dilatable de façon élastique et flexible. D'autres espèces de surfaces hélicoïdales peuvent être engendrées en faisant passer la génératrice (droite ou courbe) toujours par le point H mais non plus par le point O ; au lieu de cela, on la fait passer par un point quelconque G de la conductrice, situé dans le plan de la ligne cyclique, mais participant de son mouvement translatore. Les pas de vis à arête vive, de nombreux outils du genre des perceuses, les surfaces d'animaux et de plantes torsées, de même que les coquilles univalves et les fleurs, les feuilles et les graines enroulées en forme de spirale, sont autant d'exemples qui répondent à cette définition<sup>1</sup>.

Il est possible de construire, en analogie parfaite avec les hélicoïdes correspondants, de nombreuses surfaces hélicoïdales appartenant à la même conductrice et qui peuvent être simultanément paradrome et isotropes, ou diadromes avec des types de torsion identiques ou inverses.

Différents points situés sur la génératrice OH ou GH peuvent décrire simultanément avec H, des hélicoïdes isotropes qui parcourent les mêmes surfaces hélicoïdales les uns à côté des autres, et dont les torsions sont paradromes entre elles.

Dans une ficelle ou une corde fabriquée par la torsion simultanée et conjuguée de multiples fibres ou ficelles tendues à l'origine les unes à côté des autres, les composants représentent une multiplicité d'hélicoïdes paradromes qui peuvent être considérés comme appartenant en groupe à différentes surfaces

1. Un joli cas nous en est offert par les ramoncules de la *Casuarina stricta*, tordus de façon dexiotrope, que A. Braun a fait figurer dans l'article mentionné ci-dessus, sur le tableau 34, fig. 5 à 7.

hélicoïdales paradromes. Le cas le plus simple que nous puissions retenir ici, celui où la ficelle est faite de deux fils, nous fournira un point de départ essentiel en vue de nouvelles recherches topologiques.

Il convient encore d'indiquer la multiplicité des lignes et des surfaces hélicoïdales qui résultent de la variété de formes de la conductrice. Sans entrer dans le détail de cas qui peuvent s'avérer très complexes et qui ne peuvent être résumés méthodiquement sans que soit pris préalablement en considération le concept de complexion linéaire et de surface, nous ne mettrons ici l'accent que sur les deux formes simples et aisément concevables qu'il est possible de donner à la conductrice : l'hélicoïde et la ligne cyclique. Soit  $h$  un hélicoïde et  $g$  sa conductrice, laquelle — comme nous l'avons implicitement supposé — n'est pas elle-même hélicoïdale ou du moins n'est pas considérée comme telle : dans ce cas, l'hélicoïde  $h$  est un hélicoïde simple ou de premier ordre. Soit maintenant un nouvel hélicoïde  $k$  dont la conductrice est  $h$ , dans ce cas-ci l'ascoïde sur la surface duquel est situé  $k$ , possède une forme hélicoïdale et  $k$  est un hélicoïde de deuxième ordre. Si nous nous servons à son tour de  $k$  comme conductrice d'un hélicoïde  $l$ , alors  $l$  est un hélicoïde de troisième ordre, tandis que l'ascoïde correspondant possède une forme hélicoïdale de deuxième ordre, et ainsi de suite.

La possibilité de transposer ces concepts à des surfaces hélicoïdales ne nécessite pas d'autre démonstration.

Si, de plus, la conductrice  $g$  est une ligne cyclique, l'ascoïde correspondant (dont on suppose qu'il enferme en outre la conductrice cyclique en son entier) peut être clos de telle façon qu'il délimite ou non, en tout lieu, son espace tubulaire en forme de boucle par rapport à l'espace extérieur. Dans le cas où cet espace n'est pas délimité, peuvent se produire soit des entrecroisements de toutes sortes, soit une interpénétration successive (à la façon de tuyaux) d'un nombre quelconque de tours de l'ascoïde sans courbe d'intersection. On peut tracer sur ces divers ascoïdes en forme de boucle, des hélicoïdes simples ou composés. Si l'ascoïde est complètement fermé, un hélicoïde tracé dessus peut être bouclé sur lui-même et devenir ainsi une ligne simultanément hélicoïdale et circulaire, ceci aussi bien pour un tour

unique que pour un nombre quelconque de tours le long de l'ascoïde en son entier. Pour un nombre  $n$  de tours, chaque partie de l'ascoïde se présente recouverte d'un hélicoïde multiple de  $n$  dont les composants sont isotropes. Mais l'hélicoïde peut être non fermé et si on le prolonge suffisamment, il peut recouvrir chaque partie de l'ascoïde, d'un hélicoïde infiniment multiple. A la place d'un seul hélicoïde, on peut construire sur l'ascoïde circulaire, un nombre quelconque d'hélicoïdes fermés ou non, iso- ou hétérotropes, avec torsions para-ou diadromes. On utilise de semblables constructions pour l'ascoïde cyclique ouvert, à cette seule différence près que des hélicoïdes fermés ne sont rendus possibles qu'au cas où il existe des courbes d'intersection.

Enfin, des hélicoïdes d'ordre supérieur peuvent également être cycliques lorsque leur conductrice principale est une ligne circulaire. Il serait superflu de revenir ici sur la multiplicité des cas susceptibles de se présenter et dont nous avons déjà indiqué l'essentiel à propos des deux exemples précédents dont se trouve composé le cas présent.

Des surfaces hélicoïdales peuvent aisément être substituées à toutes ces différentes sortes d'hélicoïdes ou combinées avec elles.

La mention de quelques exemples va nous aider à préciser nos idées sur ce que nous venons d'avancer, sans que nous ayons besoin pour autant d'illustrations nombreuses et détaillées. Les cordes, les cordages, les cordons, fabriqués à partir de multiples fils de caret et de torons par torsions successives, donnent un exemple très répandu d'hélicoïdes d'ordres variés dans lequel (d'après les règles techniques) les types d'ordre successifs doivent toujours être opposés. Si un cordage de bateau est composé de trois torons torsadés de façon dexiotrope, ces composants vont donner l'image d'un hélicoïde triple dexiotrope de premier ordre avec torsions paradromes. Si chaque toron consiste en quatre torons plus minces, ces derniers vont former trois hélicoïdes laetropes quadruple de deuxième ordre. Et si, de plus, chacun de ces torons est formé de deux ficelles, elles-mêmes faites chacune d'un nombre indéterminé de fils de chanvre, les ficelles seront torsadées selon des hélicoïdes doubles dexiotropes de

troisième ordre et les fils selon des hélicoïdes multiples laeotropes de quatrième ordre. Enfin, comme c'est la règle sur les bateaux, si le cordage est enroulé sur le pont en forme d'hélicoïde, l'ordre de l'ensemble des hélicoïdes mentionnés augmentera de 1 et le fil de caret présentera des hélicoïdes multiples laeotropes de cinquième ordre avec torsions paradromes. Pour de nombreux articles de passementerie tels que cordons et guanses torsadées, on rencontre des exemples similaires mais en partie plus compliqués. Il est permis d'indiquer à cette occasion l'existence de cas en un certain sens paradoxaux, où par torsions successives, surtout opposées — pratiquement par alternance de torsions —, les hélicoïdes d'ordre supérieur perdent tout à fait à première vue et à certains endroits leur caractère de lignes doublement courbées ou même tout simplement courbées et donnent ainsi l'impression d'une forme de courbes ondulées (trochoïdes) ou même de lignes droites. Quoique, vue de l'extérieur, une corde puisse dans de tels cas se rapprocher beaucoup d'un toron torsadé, elle reste néanmoins de fait encore très différente d'une tresse, ce que des considérations ultérieures sur le tresage devront examiner de plus près. Dans la mesure où les déterminations quantitatives sont accessoires en topologie, ce paradoxe est à considérer ici comme le fait du hasard et trouve pour ainsi dire son pendant géométrique avec l'exemple connu de l'hypocycloïde qui devient une ligne droite dès que le point qui la décrit est situé sur la circonférence d'un cercle engendrant qui possède une taille de la moitié du cercle d'origine sur la paroi intérieure duquel il se déroule. On aurait pu à juste titre omettre de mentionner cette sorte d'occurrences si elles n'étaient particulièrement aptes à fonder inductivement le droit de considérer dans d'autres cas, si besoin était (ou si on le voulait bien), des lignes ou des parties de traits qui pourraient paraître à première vue tout sauf hélicoïdales, comme d'authentiques hélicoïdes ou des parties d'hélicoïdes, ou même de transposer leur type de torsion en un type hétérotrope et ce, en l'attribuant à un ordre supérieur. Un exemple rendra cela plus clair. Enroulons sur une tige rectiligne une ficelle de façon dextrotrope : il est vrai que la tige peut alors être envisagée — et c'est le point de vue qui s'offre à nous le plus naturellement — comme l'image de la

conductrice de l'hélicoïde dextrope décrit par la ficelle ; mais on peut aussi considérer la ficelle comme conductrice (hélicoïdale) et la ligne droite symbolisée par la tige, comme hélicoïde dextrope de deuxième ordre, ou encore tige et ficelle prises ensemble pouvant passer pour un double hélicoïde (de deuxième ordre) dont la conductrice serait un hélicoïde dextrope imaginé à l'intérieur de la tige, entre son axe et la ficelle, et dont les torsions seraient paradromes avec la dite ficelle. Si nous conférons alors à la tige (supposée à cette fin suffisamment flexible) une torsion laéotrope, la ficelle représente ainsi de la façon la plus simple un hélicoïde dextrope de deuxième ordre dont la conductrice, située à l'intérieur de la tige, est hélicoïdale de façon laéotrope ; néanmoins, la tige tout comme son axe peuvent être considérés comme étant un hélicoïde dextrope de troisième ordre dont la conductrice est un hélicoïde dextrope de deuxième ordre représenté par la ficelle ; ou encore, l'axe de la tige et de la ficelle pris à nouveau ensemble, peuvent passer pour un double hélicoïde dextrope de troisième ordre dont l'hélicoïde paradrome avec la ficelle que nous venons d'imaginer à l'intérieur de la tige, forme la conductrice dextrope hélicoïdale dans le deuxième ordre.

Pour les deux autres des trois cas que nous venons de discuter, à savoir les hélicoïdes avec conductrice annulaires et hélicoïdo-annulaires, il serait tout aussi aisé de se servir d'exemples évidents à l'aide d'objets souples en forme de ficelles (fils électriques et autres fils de métal). Envisageons donc parmi les divers spécimens de cette appartenance tels que ceux que nous venons d'évoquer, celui qui aurait droit à un intérêt plus particulier en tant que point de départ pour des considérations ultérieures sur les complexions linéaires dans l'espace, à savoir les hélicoïdes multiples isotropes et fermés ; et contentons-nous pour l'instant, puisqu'il ne s'agit que d'exemples, de choses simples. Prenons deux ficelles de même longueur et tendues parallèlement (homodromiquement) l'une à côté de l'autre. Les extrémités de l'une des ficelles seront désignées par 1 et  $\bar{1}$ , celles de l'autre par 2 et  $\bar{2}$ , de telle façon que 1 et 2 d'une part, ainsi que  $\bar{1}$  et  $\bar{2}$  d'autre part, soient placés respectivement au plus près. Si l'on tord maintenant les deux ficelles en tournant la ligne

$\bar{1} \bar{2}$  un nombre quelconque de fois autour d'un axe parallèle à la direction longitudinale initiale des ficelles, tandis que la ligne  $1 \ 2$  reste immobile, alors, selon le sens de la torsion, les deux ficelles formeront un hélicoïde double dexiotrope ou laeotrope, dont la conductrice courera dans la direction de l'axe de torsion mentionné. La double ficelle ainsi produite par la réunion de ses deux extrémités de telle sorte que  $1, \bar{1}, 2, \bar{2}$  soient nouées deux à deux de façon quelconque, peut être transformée en un hélicoïde double bouclé sur lui-même. Pour ce qui concerne la réunion des extrémités, voire leur fermeture, deux cas seulement s'avèrent possibles dans notre exemple, à savoir :

première fermeture :	$(1 \ \bar{1})$
	$(2 \ \bar{2})$
deuxième fermeture :	$(1 \ \bar{2})$
	$(2 \ \bar{1})$

Dans le premier cas, chacune des deux ficelles prise isolément est fermée en anneau ; dans le second, les deux forment ensemble une ligne fermée. Le premier cas a lieu lorsque la torsion consiste en un nombre quelconque de tours entiers, c'est-à-dire un nombre pair de demi-tours ; le second cas, lorsque le nombre de demi-tours est impair. Le premier cas produit, en tant que la torsion 0 est elle aussi subsumée, deux anneaux séparés ou deux anneaux enchaînés avec torsion unique ou multiple ; le second cas aboutit à un anneau noué avec torsion unique ou multiple, à propos duquel les considérations sur les nœuds apporteront plus de lumière.

Si, au lieu de deux ficelles, on en avait pris trois, on aurait pu produire, après un nombre quelconque de torsions dexio- ou laeotropes, par réunion des extrémités  $1, 2, 3$  avec les extrémités  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ , en combinant celles-ci deux-à-deux de façon quelconque, un triple hélicoïde fermé en forme d'anneau. Les six fermetures possibles donneraient alors (abstraction faite du nombre de torsions) trois cas essentiellement différents :

$(1 \ \bar{1})$	$(1 \ \bar{1})$	$(1 \ \bar{3})$	$(1 \ \bar{2})$	$(1 \ \bar{2})$	$(1 \ \bar{3})$
$(2 \ \bar{2})$	$(2 \ \bar{3})$	$(2 \ \bar{2})$	$(2 \ \bar{1})$	$(2 \ \bar{3})$	$(2 \ \bar{1})$
$(3 \ \bar{3})$	$(3 \ \bar{2})$	$(3 \ \bar{1})$	$(3 \ \bar{3})$	$(3 \ \bar{1})$	$(3 \ \bar{2})$

Premier cas : la première fermeture engendre trois anneaux séparés ou enchaînés.

Deuxième cas : les deuxième, troisième et quatrième fermetures engendrent deux anneaux (l'un composé d'une seule ficelle, l'autre des deux autres ficelles) qui peuvent être séparés ou enchaînés, simples ou noués.

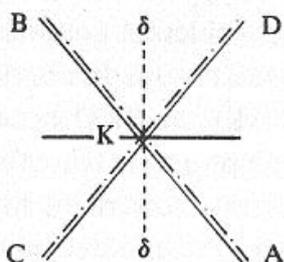
Troisième cas : les cinquième et sixième fermetures produisent un seul anneau simple et noué.

Ces exemples contiennent effectivement d'importants points de départ pour les futures investigations dans cette partie de la topologie qui devra traiter de la complexion linéaire dans l'espace et spécialement du nouage, de l'enchaînement et du tressage. Ces investigations s'en réserveront intégralement la poursuite et la généralisation. Il importe cependant de souligner encore ceci, qui est plus immédiatement en liaison avec la nature de l'hélicoïde, qu'en des circonstances par ailleurs identiques et dans tous les cas évoqués jusqu'ici, les formations linéaires qui sont mutuellement dans une relation de perversion et donc différentes les unes des autres non seulement par leurs situations mais aussi par leurs figures, sont engendrées à partir d'hélicoïdes composés de façon quelconque, tout comme pour l'hélicoïde simple, par torsion hétérotrope ou par torsion inverse. On pourra dorénavant utiliser les désignations « dexiotrope » et « laetrotrope » pour opérer également une différenciation précise dans ce cas-ci.

Enfin, l'idée de l'hélicoïde doit encore être appliquée à un cas élémentaire déjà évoqué ci-dessus (page 60) qui joue généralement un rôle essentiel pour les complexions linéaires dans l'espace, ainsi que partiellement pour les complexions planes. Car l'étude topologique des formations quelconques dans l'espace doit désormais être le plus souvent liée à leur projection sur une surface — plane ou sphérique — où les lignes projectives, encore appelées rayons, sont supposées être, pour le dire de la façon la plus générale, homocentriques, c'est-à-dire parallèles, ou, si on les prolonge suffisamment, supposées passer par un point commun : l'œil de l'observateur. Dans de telles représentations en deux dimensions, une distinction de la situation relative des différentes parties de corps, de plans ou de lignes

qui possèdent des points d'image communs s'avère nécessaire pour reconnaître les objets qui se recouvrent mutuellement dans l'image comme telle, et en tirer leurs positions relatives et leurs distances par rapport à l'œil de l'observateur sans avoir à recourir à d'autres projections. Les règles habituelles du dessin offrent des moyens suffisantes pour atteindre ce but dans la représentation des corps et des plans, de même pour les lignes lorsqu'il s'agit de représenter des corps linéaires dans l'espace (tiges, fils, ficelles, etc.).

Fig.5



Dans la *figure 5*, les deux lignes ou ficelles AB et CD se croisent l'une sur l'autre en K, tels le fil de trame et le fil de lisse d'un tissu : AB étant le plus près de l'œil de l'observateur (se trouvant donc dessus), CD en étant le plus éloigné. Il semble à peine nécessaire de préciser que la distance séparant les points des deux lignes là où elles se superposent dans leur projection en K n'est pas à prendre en considération. Un tel croisement\* où il est facile, au premier coup d'œil, de distinguer dans la projection ou dans le dessin, d'après notre convention, le fil placé au-dessus de celui qui est en dessous, un tel croisement, donc, sera appelé *surcroisement\*\** par opposition avec l'*entrecroisement\*\*\**, dans lequel existe un véritable point d'intersection dans l'espace, et où la distance entre les deux fils en K, dont nous venons de parler, est égale à zéro ou peut être considérée au moins comme infiniment petite. Deux chemins peuvent alors, comme pour un banal carrefour, s'entrecroiser ou

\* *Kreuzung.*

\*\* *Überkreuzung.*

\*\*\* *Durchkreuzung.*

bien, comme tel est le cas dans certaines villes<sup>1</sup> et pour de nombreux croisements entre chemins de fer et voies d'un autre type, se surcroiser. Quand aucune confusion n'est possible, on se servira dans les deux cas de l'expression « croisement ». On nommera le point d'intersection lui-même, dans la projection d'un surcroisement, *point nodal*.

Si nous prenons maintenant deux lignes AB et CD qui se surcroisent, comme appartenant à un double hélicoïde dont la conductrice passe par K entre les deux lignes, celles-ci peuvent, dans le surcroisement tel qu'il apparaît sur la figure là où AB se trouve au-dessus de CD, être considérées comme hélicoïdales, de façon dexiotrope ou laetrope selon que la conductrice est située dans les espaces angulaires AKC et BKD ou dans les espaces AKD et BKC. Par suite, nous pouvons transférer les dénominations dexiotrope et laetrope au croisement lui-même si nous considérons celui-ci par rapport à une des deux lignes conductrices, diagonales et perpendiculaires entre elles. Pour les recherches futures sur les ficelles, rubans ou autres corps quelconques enchevêtrés et entrelacés plusieurs fois l'un avec l'autre, il sera utile de désigner dans les projections les quatre espaces angulaires que produit chaque surcroisement, avec les symboles  $\delta$  et  $\lambda$ , comme le montre la figure, de telle sorte que le surcroisement soit dexiotrope pour une conductrice parcourant les espaces  $\delta$ ,  $\delta$  et laetrope pour une droite perpendiculaire à la précédente, dans les espaces  $\lambda$ ,  $\lambda$ . Il convient de mentionner que cette désignation vaut aussi bien pour l'envers du surcroisement (où CD en K est plus près que AB de l'œil de l'observateur), que pour l'endroit que nous avons considéré en premier lieu, puisque seules les perversions et non les inversions peuvent avoir une influence sur ce type de croisement.

Quelques exemples de complexions linéaires avec surcroisements nous familiariseront avec l'usage de ce mode de désignation.

1. La curiosité de la ville de Homburg-von-der-Höhe réside en une « voie où une voiture peut passer au-dessus d'une autre ».

Fig.6

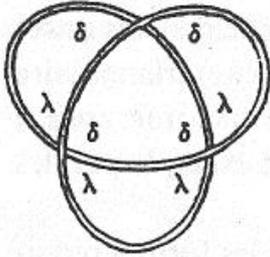


Fig.7

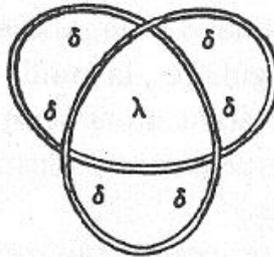
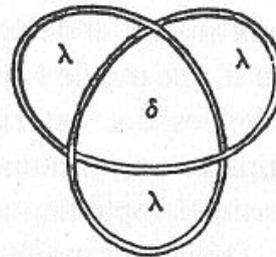


Fig.8



Si l'on projette les complexions des *figures 6, 7 et 8*, c'est-à-dire si l'on considère les croisements comme des surcroisements, elles sont toutes identiques. Chacune présente une ligne fermée sur elle-même avec trois croisements, trois parcelles à deux angles chacune ou *anses* et une parcelle à trois angles ou *maille*. Leur seule différence réside dans la nature des surcroisements, et cela nous est indiqué par le symbole du type de surcroisement, de telle sorte qu'il serait tentant d'engager une discussion algorithmique pour traiter des nombreuses questions que posent les possibilités ou les impossibilités de transformations dans certaines conditions : mais le lieu est mal choisi. La complexion de la *figure 6* peut être réduite à un simple anneau non noué, avec disparition des trois croisements. Dans les *figures 7 et 8*, le nombre de croisements ne peut pas être diminué par transformation, alors qu'il peut être augmenté comme dans tous les cas. La *figure 6* est donc une forme réductible ; les *figures 7 et 8*, des formes réduites. Cela est étroitement lié au fait que dans les deux dernières figures, toutes les parcelles sont monotypes ; par contre dans la première figure, une seule (l'anse inférieure) est monotype ; les autres, amphitypes. L'espace extérieur, que nous devons envisager dans ce type de considérations comme une parcelle indépendante (*amplexum*), est amphitype dans la *figure 6*, monotype dans les *figures 7 et 8*, et triangulaire dans les trois complexions. Dans la *figure 7*, à l'*amplexum* correspond la lettre  $\lambda$  ; dans la *figure 8* :  $\delta$ . La *figure 7* ne peut être transformée en la *figure 8* ni l'inverse : elles se trouvent en effet l'une par rapport à l'autre dans un rapport de perversion. Chacune d'elle peut cependant être transformée sans changement du nombre

de croisement, de telle façon que le symbole de l'espace extérieur se change en  $\delta$  pour la *figure 7* et en  $\lambda$  pour la *figure 8*. Mais ce faisant, on obtiendrait par exemple, dans la *figure 8* : deux anses  $\lambda$  et deux mailles  $\delta$  triangulaires au lieu de trois anses  $\lambda$  et d'une maille  $\delta$  triangulaire ; la maille (amplexe) triangulaire  $\delta$  de l'espace extérieur étant alors remplacée par une anse  $\lambda$  amplexe ; nous nous abstiendrons d'illustrer cet exemple par des dessins supplémentaires.

Désignons maintenant, pour ce qui concerne les formes réduites à parcelles monotypes, chaque parcelle par le symbole de son type suivi d'un indice ou exposant qui précise le nombre d'angles de la parcelle, et rassemblons enfin en un coefficient les parcelles isotypes de même indice ; pour la *figure 7* par exemple, le symbole de la complexion pour l'ensemble des formes réduites sera alors :

$$\begin{array}{l} 3 \delta^2 \\ 2 \lambda^3 \end{array}$$

Pour la *figure 8*, on obtiendra (après échange de  $\delta$  et  $\lambda$ ), le symbole suivant :

$$\begin{array}{l} 2 \delta^3 \\ 3 \lambda^2 \end{array}$$

L'exposant 1 (c'est-à-dire  $\delta$  ou  $\lambda$  seul) désignerait alors une boucle qu'on ne trouve pas parmi les formes réduites. L'exposant 2 indique qu'il s'agit d'anses. Des exposants supérieurs indiquent qu'il s'agit de mailles à trois angles ou plus. La somme de tous les coefficients donne le nombre de la totalité des parcelles, amplexum inclus, et est égale au nombre de croisements plus 2. La somme des produits des coefficients et de leurs exposants donne, dans chacune des deux parties du symbole, le double du nombre de croisements. De tels symboles contiennent les caractères topologiques de ce qu'on appelle nouage. Les *figures 7* et *8* s'accordent d'ailleurs avec l'anneau simplement noué mentionné ci-dessus, qu'on obtient par demi-torsions suivies de la fermeture en anneau de deux ficelles précédemment paradromes. Dans la *figure 7*, le type de torsion est dexiotrope ; dans la *figure 8*, laeotrope.

Poursuivons encore avec quelques autres exemples. Des trois complexions représentées par les *figures 9, 10 et 11*, qui ont toutes le même nombre de croisements et les mêmes formes parcel-laires, les deux premières sont réductibles et la troisième réduite.

Fig.9

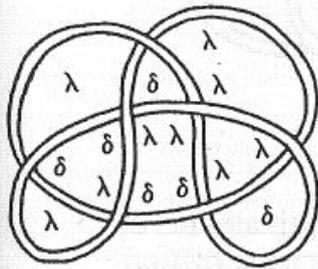


Fig.10

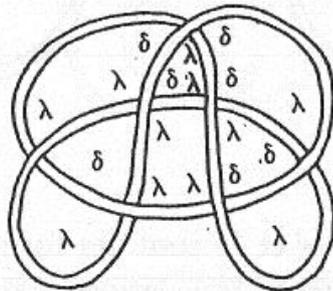
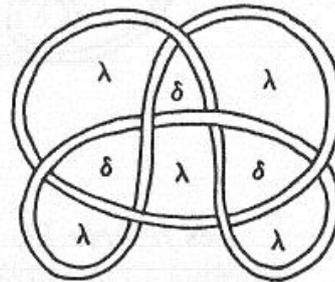


Fig.11



La réduction de la *figure 9* aboutirait à trois croisements seu-lement ; celle de la *figure 10*, à cinq. La *figure 8* représente la réduction de la *figure 9*.

Fig.12

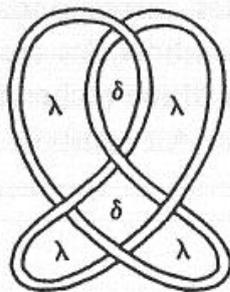


Fig.13

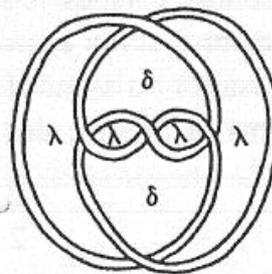


Fig.14

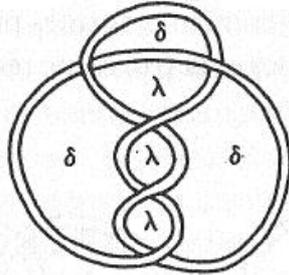
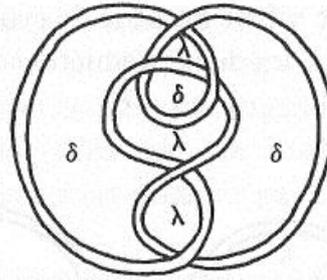


Fig.15



Les figures 12, 13, 14 et 15 sont des formes équivalentes et réduites à cinq croisements dans lesquels on peut transformer la figure 10 par réduction. Leur symbole de complexion est :

$$\begin{array}{l} 2 \delta^4 + \delta^2 \\ 2 \lambda^3 + 2 \lambda^2 \end{array}$$

L'amplexum possède successivement les symboles  $\delta^4$ ,  $\delta^2$ ,  $\lambda^3$ ,  $\lambda^2$ . Ces quatre formes épuisent le nombre de réductions possibles dans le cas présent, et correspondent ici aux quatre membres du symbole. Le déploiement des rapports entre le nombre des différentes formes réduites possibles correspondant à un symbole donné, avec le nombre des membres, les coefficients et les exposants du symbole, fait l'objet d'une recherche particulière dans la théorie des complexions. Au symbole

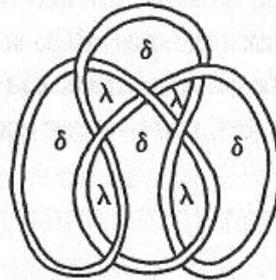
$$\begin{array}{l} 2 \delta^4 + 3 \delta^3 \\ 2 \lambda^5 + 2 \lambda^2 \end{array}$$

correspondent cinq formes réduites différentes avec sept croisements chacune, dans lesquels l'amplexum prendrait deux fois le signe  $\delta^2$  et une fois respectivement  $\delta^4$ ,  $\lambda^5$  et  $\lambda^2$ . Le symbole de la forme réduite à sept croisements de la figure 11 est :

$$\begin{array}{l} \delta^5 + 3 \delta^3 \\ \lambda^4 + 2 \lambda^3 + 2 \lambda^2 \end{array}$$

A ce symbole correspondent, outre la figure 11, dans laquelle l'amplexum est  $\delta^5$ , cinq autres formes encore, dont celle de la figure 16 pour laquelle l'amplexum est  $\lambda^4$ .

Fig.16

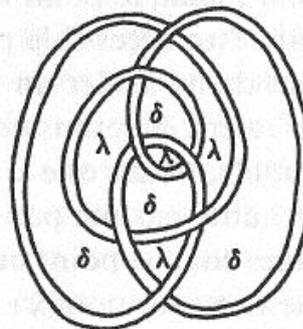


Dans certains cas, un symbole est équivalent à un autre en ceci que les formes réduites de l'un peuvent être rapportées par transformation aux formes réduites de l'autre. Voici un exemple d'une telle équivalence :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^5 + 3 \delta^3 \\ \lambda^4 + 2 \lambda^3 + 2 \lambda^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 2 \delta^4 + 2 \delta^3 \\ \lambda^4 + 2 \lambda^3 + 2 \lambda^2 \end{array} \right\}$$

Tandis qu'au premier de ces deux symboles équivalents correspondent six formes réduites, au deuxième en correspondent cinq autres, de telle sorte que toutes les onze formes réduites (avec sept surcroisements chacune) sont équivalentes entre elles. Une des cinq formes correspondant au deuxième symbole est représentée par la *figure 17* dont l'amplexum est  $\lambda^2$ .

Fig.17



Ces exemples, qui ne se réfèrent qu'à une seule ligne fermée dans l'espace, pourront servir à l'occasion, avec quelques indications supplémentaires, à attirer l'attention, dans la prise en considération des complexions spatiales, sur les relations qui existent entre les concepts fondamentaux élaborés pour l'hélicoïde et les rapports modaux les plus complexes.

---

Au terme de ces premières études préliminaires, précisons d'encore plus près l'esquisse de quelques autres secteurs de la topologie dont l'approfondissement sera réservé à des occasions futures.

Des complexions linéaires, c'est-à-dire des lignes quelconques, droites ou courbes, ou des agrégats de telles lignes, peuvent être contenus dans une seule surface — plan ou sphère —, mais peuvent aussi bien traverser l'espace dans une direction. Elles peuvent présenter dans les deux cas un nombre quelconque de points d'intersection ou de points de réunion ; en outre, dans le deuxième cas, elles peuvent présenter, en plus de ces points de réunion, un nombre quelconque de surcroisements par projection sur un plan ou une surface sphérique.

Pour les complexions linéaires dans le plan, c'est-à-dire là où il n'existe que des points d'intersection et des points de réunion, chaque point qui appartient au complexe linéaire peut être considéré comme un lieu à partir duquel un nombre déterminé de chemins est ouvert vers les autres points du complexe. Ainsi, sur une ligne droite tracée entre deux points A et B, chacun des deux points d'extrémité peut être considéré comme accessible par un chemin et un seul ; chaque point intermédiaire C de la ligne pouvant par contre être accessible par deux chemins. Si l'on exigeait maintenant de ne fouler un chemin qu'une seule fois, alors A et B ne devraient en retour ne former que les limites d'un trait continu simple, tandis que le point C pourrait être abordé par une voie et quitté ensuite par une autre. Il est évident qu'on peut envisager chaque point où  $n$  chemins trouvent leur réunion, selon que  $n$  est un nombre pair ou impair, soit comme point d'intersection de  $\frac{n}{2}$  lignes, soit comme le lieu

où le point d'intersection de  $\frac{n-1}{2}$  lignes se réunit avec le

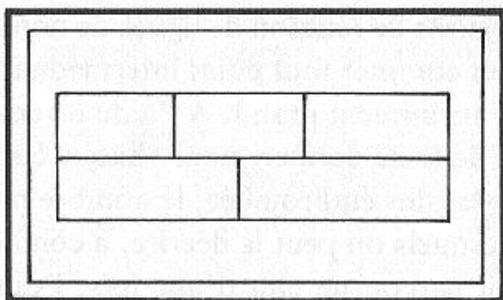
point d'extrémité d'une ligne. Il s'ensuit qu'une complexion linéaire peut être considérée dans sa totalité comme l'agrégat d'un nombre déterminé de traits continus, dont chacun possède deux points terminaux ou points d'extrémité qui sont situés sur des points de réunion d'un nombre impair de lignes. Il doit alors exister dans chaque complexion linéaire (et par conséquent dans chaque somme de complexions non connexes) un nombre pair de points de réunion d'un nombre impair de lignes, tandis que le nombre de points de réunion de lignes de nombre pair (parmi lesquels on peut compter tout point intermédiaire sur une ligne) est quant à lui infiniment grand. A l'aide de cette proposition, il n'est pas difficile de donner, pour chaque complexion déterminée, fût-elle la plus embrouillée, le nombre minimal de traits continus par lesquels on peut la décrire, à condition qu'aucune partie n'en soit parcourue plus d'une fois. Pour déterminer ce nombre minimal de traits, il faut alors compter les points de réunion de lignes de nombre impair de la complexion. Si le nombre, qui doit toujours être pair, est appelé  $p$ , alors le nombre minimal de traits par lesquels la configuration peut être décrite sera  $\frac{p}{2}$ . Pour une véritable effectuation autant que pour la

délimitation des diverses façons possibles de procéder, il serait bien entendu nécessaire de faire encore des recherches complexes, qui ne pourraient avoir leur place dans cette étude. Mais notons cependant qu'au cas où  $p = 0$ , le nombre de traits n'est pas égal à 0 mais à 1 ; ces déterminations s'appliquent à une multiplicité de complexions non connexes autant qu'à chacune prise isolément, de telle façon que pour la description de  $m$  complexions non connexes où il n'existe aucun point de réunion d'un nombre impair de lignes, comme par exemple pour la description de  $m$  lignes circulaires non connexes situées les unes en partie à l'extérieur des autres et en partie concentriquement les unes par rapport aux autres, on a besoin de  $m$  traits, aussi bien que pour la description d'une complexion qui posséderait  $2m$  points de réunion d'un nombre impair de lignes, ou  $m$  complexes non connexes dont chacun contiendrait deux points de cette espèce.

Indiquons en outre que la réussite d'un essai réel dans le cas où  $p$  n'est pas égal à 0 dépend de la condition que le point de départ et le terme de chaque trait ne puissent se rencontrer qu'en des points de réunion d'un nombre impair de lignes.

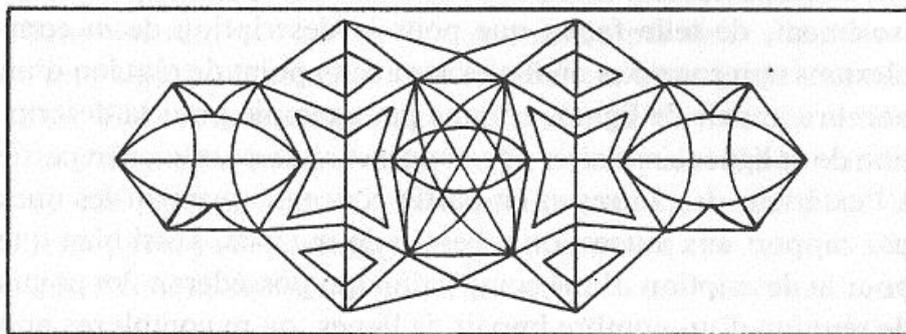
Dans la *figure 18*, il existe huit points « impairs » (chacun à trois chemins) ; si on ne trace pas deux fois la même partie, cette figure ne peut être dessinée en moins de quatre traits continus<sup>1</sup>.

Fig. 18



Un carré inscrit dans un cercle et muni de ses deux diagonales exigerait au moins deux traits ; la grille d'un échiquier (de soixante-quatre cases), au moins quatorze traits. Si toutes les cases noires de cet échiquier étaient pourvues d'une diagonale de même direction, alors le dessin pourrait être effectué en neuf ou six traits continus, selon que les diagonales des cases noires d'angle seraient ou non sur une même ligne ; enfin, si la totalité des cases de l'échiquier était pourvue de diagonales parallèles, on pourrait achever la figure d'une seule et même trait.

Fig. 19



1. C'est la proposition de Clausen, mentionnée à la p. 813 des *A.N.*, N° 494.

La *figure 19* peut elle aussi être dessinée d'un seul trait, puisqu'elle possède seulement deux points « impairs », nommément les deux points de réunions de cinq traits à chaque extrémité de l'axe horizontal.

Si l'on applique maintenant la proposition précédente concernant le nombre  $p$  à un cas géodésique, elle peut être énoncée de la façon suivante : dans chaque chaîne de triangles<sup>1</sup> de grandeur quelconque, les points autour desquels un nombre impair d'angles est situé à l'horizon (angles qui totalisent  $360^\circ$ ), ces points sont toujours de nombre pair, tandis que le nombre de points de triangles qui sont entourés d'un nombre pair d'angles peut être soit impair soit pair.

Si l'on donne enfin toute leur étendue à ces remarques, elles trouvent leur application aux complexions linéaires dans l'espace. Les surcroisements qui apparaissent dans les projections doivent, comme il se doit, être distingués des entrecroisements ou points de réunion.

Pour ce qui concerne les complexions linéaires dans un plan, qui ne possèdent pas de points de nombre impair, et qui doivent donc être considérées comme des traits fermés faisant retour sur eux-mêmes ou comme des agrégats de tels traits, la question des parties de plan délimitées par la complexion (parcelles) devrait faire l'objet à soi seul d'une discussion. La description des complexes sur une surface sphéroïde fermée ou sur un globe terrestre a, du point de vue de la simplicité et de l'élégance des propositions, des avantages par rapport à la description sur une surface non fermée ou un plan, qui peuvent toujours être considérés pour ces questions comme simples fragments d'une surface sphéroïde complète (de très grande dimension) et à laquelle on peut en général aisément aboutir à partir de la surface fermée et complète, par un certain type de développement. Si l'on imagine par exemple, sur une surface sphéroïde, une simple ligne circulaire, celle-ci divisera la totalité de la surface en deux parties A et B, dont chacune sera entièrement située d'un côté de

1. Il s'agit de la méthode des triangulations utilisée dans la géodésie classique à partir de la formule de Laplace, et qui permet de donner la mesure de l'angle géodésique. (*N.d.T.*)

la ligne de partage. On peut appeler A la surface intérieure ou enclose, et B la surface extérieure ou exclue ; ou bien l'inverse. Pour des complexions fermées et composées de plusieurs éléments, cette alternative se répète un nombre de fois identique au nombre de traits fermés simples dont on peut considérer que le complexe est composé. Une fois notre choix fait sur l'inclusion et l'exclusion, modalités qui peuvent être désignées le plus simplement possible par l'usage des nombres ordinaux 0 et 1, la valeur de chaque partie de plan délimitée sera exprimée automatiquement par un de ces nombres. Une ligne fermée avec un entrecroisement (ayant donc la forme du chiffre 8) divise la surface totale en trois parties. Si l'on désigne par 0 l'espace entourant les deux boucles<sup>1</sup>, et par 1 une des deux boucles, le nombre ordinal du territoire de l'autre boucle sera alors  $\bar{1}$ . Si l'on échange 0 et 1, c'est deux qui vient alors à la place de  $\bar{1}$ , etc. Si l'on place maintenant, dans chaque espace angulaire d'un entrecroisement, les quatre chiffres ordinaux  $a, b, c, d$ , telle sorte que  $a$  et  $b, b$  et  $c, c$  et  $d$  et  $a$  appartiennent à des angles adjacents et donc  $a$  et  $c, b$  et  $d$  à des angles opposés, il en résulte la règle suivante :

ou bien :

$$a - c = \pm 2, b - d = 0, a + c - b - d = 0$$

ou bien :

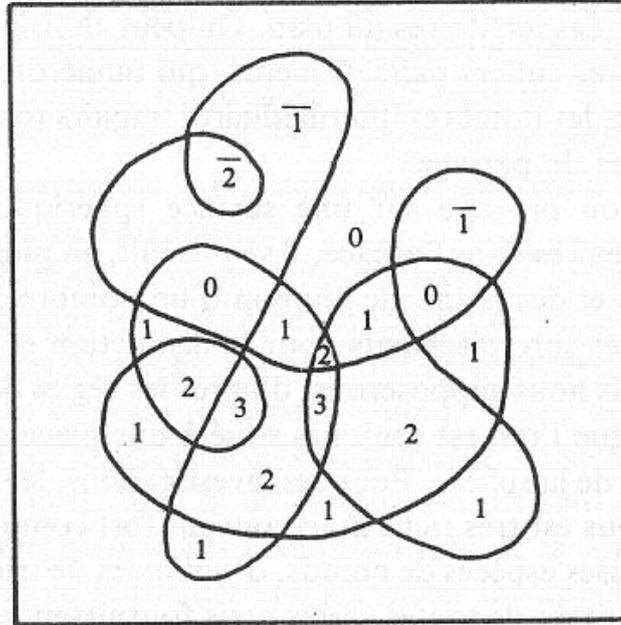
$$a - c = 0, b - d = \pm 2, a + c - b - d = 0,$$

d'après laquelle toutes les parcelles d'une complexion donnée peuvent être aisément chiffrées.

La complexion linéaire représentée sur la *figure 20* va nous servir d'exemple. Ce trait fermé partage avec dix-huit entrecroisements la surface sphérique totale en vingt parcelles ; la parcelle qui apparaît dans une représentation plane comme l'aire entourant la figure, c'est-à-dire l'amplexum, porte le nombre ordinal 0 ; mais — et cela vaut pour chacune des autres parcelles — elle pourrait être élevée (ou abaissée) à un nombre quelconque positif ou négatif par augmentation ou diminution

1. Cette partie de l'espace de la surface sphéroïde est diangulaire ; il s'agit donc d'une « anse » d'après la terminologie utilisée plus haut.

Fig.20



simultanée de l'ensemble des vingt nombres, d'un nombre entier quelconque, ce qui est bien entendu sans influence sur le nombre de classes ordinales (six dans notre exemple, allant de  $\bar{2}$  à  $\bar{3}$  inclus). Dans certains cas<sup>1</sup>, il est nécessaire d'attribuer

1. Cf. les remarques de Gauss sur les modes de distribution possibles des éventuels lieux géocentriques sur le Zodiaque pour une planète donnée, *A.N.*, n° 625. Le cas dont il est fait présentement mention, à la suite des récentes recherches effectuées sur ce sujet par M. B.A. Gould, est celui de l'enchaînement de deux orbites planétaires. Il apparaît que ce sont celles des paires, parmi les neuf orbites d'astéroïdes connus à ce jour, formant comme les anneaux d'une chaîne, qui méritent ici notre intérêt. Il s'agit des vingt-cinq combinaisons suivantes (Thétis est le nom de la planète découverte le plus récemment et qui l'a été par Graham) :

- Thétis avec Hébé, Vesta, Astrée, Iris, Junon, Flore, Pallas
- Hébé avec Vesta, Astrée, Iris, Junon, Flore, Pallas, Cérès
- Vesta avec Astrée, Iris, Junon, Flore
- Astrée avec Iris, Junon, Flore
- Iris avec Flore, Pallas
- Junon avec Pallas, Cérès
- Flore avec Pallas

où Thétis et Hébé apparaissent combinées sept fois chacune ; Vesta, Astrée, Iris et Junon, six fois chacune ; Flore et Pallas, cinq fois chacune, enfin Cérès, deux fois. Les onze combinaisons restantes où Cérès apparaît six fois, Pallas et Flore trois fois chacune, Junon, Iris, Astrée et Vesta deux fois chacune, Hébé et Thétis une fois chacune, présentent, comme pour chaque paire orbitale parmi les autres planètes principales, la simple inclusion d'une orbite dans une autre. Le trajet orbital de Cérès enferme six autres orbites : celles de Pallas, Flore, Iris, Astrée, Vesta et Thétis ; l'orbite de Pallas en contient deux : celles d'Astrée et de Vesta ; l'orbite de Junon deux aussi : celles de Flore et d'Iris ; enfin l'orbite de Hébé, une : nommément celle de Flore.

également des nombres ordinaux aux points situés sur la ligne de partage elle-même, comme on l'a fait pour les points situés à l'intérieur des territoires du plan. On peut choisir pour ceux-ci les nombres entiers pairs, 0 inclus, qui numérotent ainsi les parcelles ; et les nombres intermédiaires impairs tombent alors sur les lignes de partage.

Lorsqu'on projette sur une surface sphérique des complexions linéaires dans l'espace, il se produit, en plus des entrecroisements et des points de réunion d'un nombre quelconque de lignes, des surcroisements pour la distinction et la désignation desquels nous supposons, d'après les règles déjà établies plus haut, que l'œil est toujours situé à une place quelconque à l'intérieur de la sphère. Pour ces investigations, le matériel qui s'offre à nous est très riche mais souvent fort compliqué, dont les nombreuses espèces de nœuds, d'ouvrages de tricot et d'entrelacs ; les tissus de toutes sortes nous fournissent entre autres maints exemples en provenance des domaines de la technique et de la pratique. Certains objets dont les relations avec des questions scientifiques ne sautent pas immédiatement aux yeux, comme certains types de jeux, parmi lesquels le jeu bien connu des anneaux artificiellement entrelacés<sup>1</sup> mérite d'être distingué, sont autant de paradigmes topologiques qui ne manquent pas d'intérêt. Les contributions topologiques à venir devront entreprendre le regroupement d'un certain nombre de nœuds différents, en usage par exemple dans l'artillerie, le génie, la marine, le tissage ou les nœuds utilisés ailleurs, mais s'attacheront aussi aux noms triviaux de ces nœuds ; à cette occasion, on pourra prendre en considération, s'agissant de cas en provenance de la pratique, leurs relations non topologiques mais de nature physique, mécanique, industrielle, voire esthétique, dans la mesure où cela peut servir à la distinction de points de vue purement topologiques.

Les considérations sur la position qui ont ouvert nos études préliminaires devront, pour la suite de notre travail, être, d'une part, élargies à des cas où les éléments possèdent un nombre

1. Les considérations faites à ce sujet par Lichtenberg (*Vermischte Schriften*, t.6, p. 252) ne sont pas d'ordre topologique.

d'axes positionnels autre que trois, et d'autre part, être liées à des investigations prenant aussi en compte la *situation*, c'est-à-dire la position des lignes droites qui relient les éléments entre eux — de telles déterminations introduisant un point de vue topologique des maintes occurrences aussi bien de la mécanique industrielle<sup>1</sup> et des arts, que des sciences de la nature, et notamment des parties de la physique qui se réfèrent à l'électricité dynamique et au magnétisme.

La *symétrie* de l'espace et du mouvement forme enfin un sujet fécond pour les recherches topologiques futures, dont ce que nous avons déjà avancé sur la position peut servir, au moins partiellement, de point de départ. Quoiqu'il ne s'agisse pas de négliger dans ce cas les concepts de grandeur, de mesure, de ressemblance géométrique ni de congruence, ils sont cependant, dans la représentation des proportions ou de la symétrie spatiale, toujours en retrait derrière le concept de rapports modaux d'espace ; et par conséquent, la symétrie échoît moins aux ressorts de la géométrie qu'à ceux de la topologie. Les lois de la symétrie jouent un rôle essentiel, d'une part dans la morphologie des êtres organisés, et d'autre part en cristallographie tout particulièrement<sup>2</sup>.

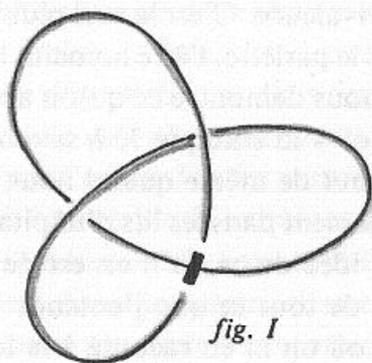
1. A cette occasion, on peut attirer l'attention sur une tentative pour représenter les mouvements des machines par des symboles : « *On a method of expressing by signs the action of machinery* », de Charles Babbage, *Philos. Trans. for the Year, 1826, part 3*, p. 250.

2. En rapport avec ce que nous venons d'évoquer, le texte désormais classique sur la cristallographie : *A Treatise on Crystallography*, de W.H. Miller (Cambridge, 1839), mérite une attention particulière, dans la mesure où l'importance de la symétrie pour caractériser les systèmes cristallins s'y trouve prise en compte et y est intégrée au mode de description de la façon la plus claire. Ainsi, l'auteur écrit, à la page 20 : « Les différents systèmes de cristallisation peuvent être distingués à un niveau de plus par la diversité des modes de symétrie observables dans la répartition des faces des cristaux correspondants. En effet, si une face se trouve posséder le symbole  $(hkl)$ , elle le sera généralement accompagnée par les faces ayant pour symboles certaines combinaisons de  $\pm h$ ,  $\pm k$ ,  $\pm l$ , déterminées par des lois particulières à chaque système et qui seront pleinement exposées dès que nous aborderons séparément la description de chacun de ces systèmes. » Il est à peine besoin de mentionner la proximité des relations qu'entretiennent l'hémiédrie et l'holédrie des formes cristallines avec la symétrie.

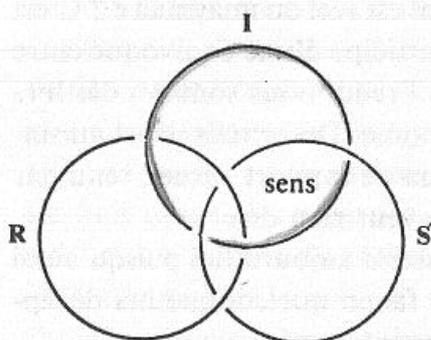
*Note sur Lacan et Listing*

Lacan a suivi l'usage des mathématiciens, qui associent au nom de Listing le nœud à quatre. Celui-ci ne figure pourtant dans aucun texte de J.B. Listing (cf. R.H. Crowell et R.H. Fox, *Introduction To Knots Theory*, 1963, Springer Verlag Ed., p. 4). On trouve par contre (cf. ici même) chez lui le nœud à cinq.

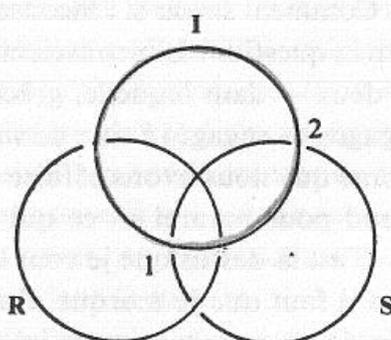
P. BRUNO et Cl. LÉGER



*fig. I*



*fig. II*



*fig. III*

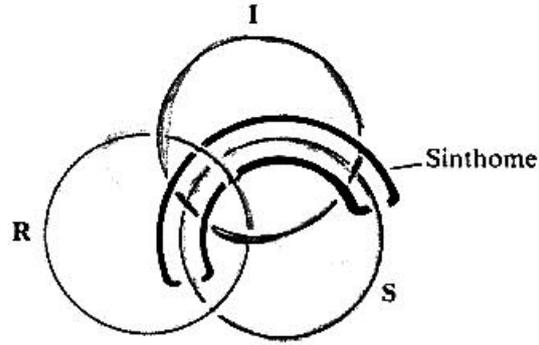


fig. IV

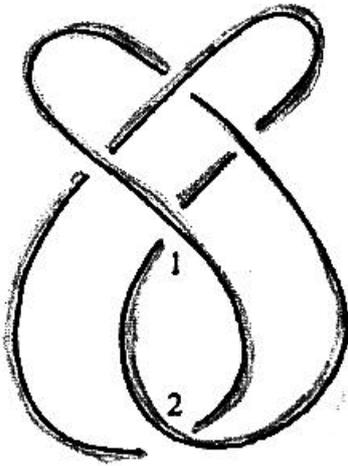


fig. V

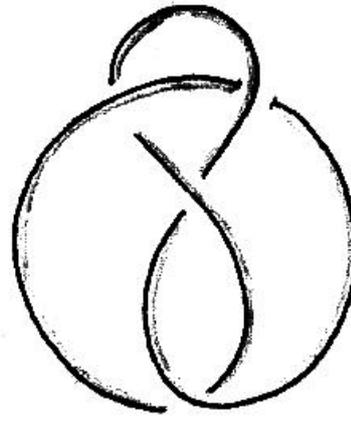


fig. VI

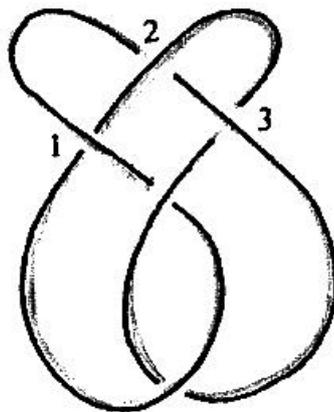


fig. VII

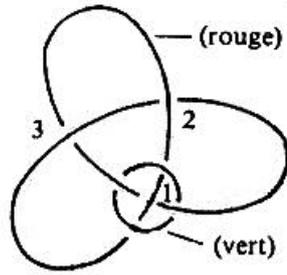


fig. VIII

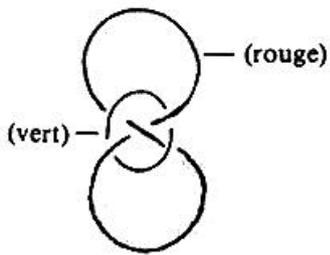


fig. IX

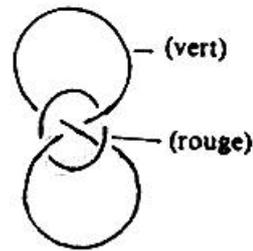


fig. X

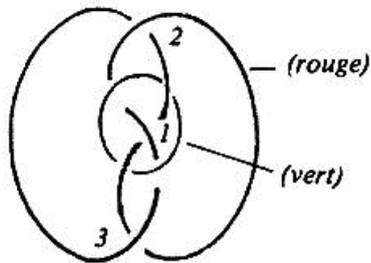


fig. XI

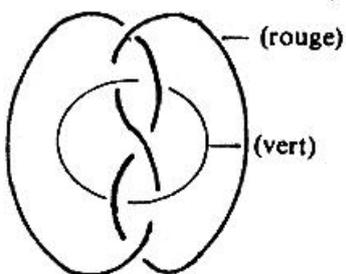


fig. XII

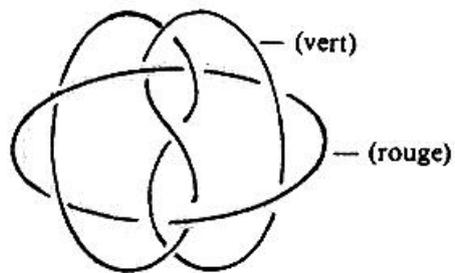


fig. XIII

## Annexes

### I

#### P.G. TAIT\*. Extrait de *On Knots*<sup>1</sup>

« [...] j'ai obtenu des Professeurs Listing et Klein quelques références bibliographiques à propos des nœuds. La littérature s'y rapportant est mince et ne porte que très rarement sur la question principale que je viens de traiter. Si l'on considère que les *Études* de Listing ont été publiées il y a trente ans et qu'elles semblent bien connues en Allemagne, ceci paraît pour le moins curieux.

Il ressort clairement d'une lettre de Listing parue dans les Comptes rendus de la R.S.E. (1877, p. 316) que celui-ci n'a publié qu'une infime partie des résultats de ses recherches. Klein lui-même a fait la très singulière découverte que *dans l'espace de dimension quatre, il ne pouvait y avoir de nœuds*.

La validité de l'intégrale de Gauss a été discutée en détails par Boeddicker (à l'aide des coordonnées usuelles aux potentiels) dans un exposé inaugural, sous le titre de *Beitrag zur Theorie des Winkels*, Göttingen, 1876.

Le Professeur Fischer m'a récemment confié une version complétée du travail de Boeddicker. Celui-ci y a ajouté une

\*Peter Guthrie Tait (1831-1901) enseigna les mathématiques à Belfast et la Philosophie naturelle à Edimbourg ; l'extrait ici donné provient des Comptes rendus de la Royal Society of Edinburgh.

1. *Transact. of the R.S.E. 1877, vol. 28, part 1, p. 190.*

vingtaine de pages qui traitent essentiellement de la relation des nœuds avec les surfaces de Riemann ; le titre en a été modifié en *Erweiterung der Gauss'schen Theorie des Verschlingungen*, Stuttgart, 1876. »

## II

### Lettre de Listing présentée par Tait.

Le Professeur Listing, à qui j'avais envoyé les épreuves du résumé que j'ai fait d'une partie de son article, a eu l'amabilité de m'écrire quelques remarques à ce sujet, dont je vous livre les passages suivants fort intéressants, ce qui accroît encore notre regret qu'un tel maître ait si peu publié sur un sujet qui est manifestement devenu le sien :

« Dans ces 'épreuves'\* l'attention devrait être attirée sur la partie qui, bien que brève, se réfère aux nœuds ou enlacements de courbes. Par ailleurs, j'eusse souhaité qu'on se référât de plus près, bien qu'il soit très élémentaire, au chapitre sur 'la position', d'autant qu'on aurait pu y trouver la raison pour laquelle je désigne la vis courante du qualificatif de laeotrope et non de dexiotrope, comme vous semblez me le reprocher à la page 307. J'ai en effet remplacé depuis fort longtemps les désignations de droite et de gauche pour les tours de vis, ainsi du reste que les termes latins et grecs qui étaient sans cesse l'occasion des confusions les plus fâcheuses, par le terme de torsion *delta* et *lambda*, qui, comme je l'ai mentionné à la page 42 de mon étude, fixe les idées d'un point de vue mnémonique et intuitif. Les botanistes — et quelques uns ont effectivement suivi ce modèle — attribueraient donc à l'*Humulus lupulus* la torsion *delta* et au

\*Listing utilise le mot anglais *proof*.

*Convolvulus* la torsion *lambda*, de même nos vis produites par l'artifice de la technique sont le plus souvent des vis *lambda* et rarement *delta*. La distinction entre inversion et perversion effectuée à partir des positions dites positives et négatives n'est qu'un résultat occasionnel et particulier.

Pour ce qui concerne les entrelacements de courbes cycliques dans l'espace, autrement dit les nœuds, l'attention des géomètres aurait dû, dans la mesure où il ne s'agissait précisément que d'*Études préliminaires*, et la démonstration ne concernant donc que certains abords les plus simples, être attirée sur l'importance de cette partie fort délicate de la topologie ; elle aurait pu être par exemple attirée par des allusions aux modes de désignation possibles (symboles, etc.) grâce auxquels nous sommes à même, comme la science doit pouvoir tenter de l'être dans tous les cas analogues, de progresser de l'intuition vers le concept. Les symboles que je propose ne prétendent à rien d'autre qu'à être une simple indication, et si je suis absolument d'accord avec vous sur le fait que le schéma rend la construction d'un complexe nodal plus aisée que ne le permet son seul symbole, il n'en reste pas moins que le schéma est beaucoup plus éloigné du concept que le symbole, abstraction faite des ambiguïtés qui persistent inévitablement dans les deux cas. Combien reste fragmentaire ce que j'ai pu indiquer à ce sujet il y a trente ans ! Je puis vous le démontrer à propos d'un point parmi tant d'autres : nommément, je me suis limité à la nodalité d'une seule courbe cyclique ou cycloïdique, et je n'ai traité de façon détaillée que des enlacements dits réduits, dont la totalité des parcelles (amplexum compris) sont monotypes, encore qu'il existe comme vous le savez, des nœuds avec des mailles dont les angles sont appelés *promiscue* et sans qu'ils soient réductibles à des formes plus simples, c'est-à-dire à un nombre plus petit de croisements\*... Il va de soi que les symboles mentionnés dans les *Études préliminaires* ne peuvent être appliqués qu'à des complexes monotypes réduits et peuvent se transformer par généralisation, mais je ne veux pas ici entrer dans les détails [...]" »

\*Listing utilise le mot anglais *crossings*.

## TABLE

<i>Préface</i> par M. Grun-Réhomme et J.-M. Vappereau .....	7
<i>Etudes préliminaires à la topologie</i> par Johann Listing .....	23
« <i>Les paroles imposées</i> » par Jacques Lacan .....	83
<i>Annexes</i> .....	95

---